Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir

Morten Werner

12. september 2002

Korrelation mellem regressorer og restled i kointegrerede enkeltligningsregressioner

Resumé:

ajfs

MOW12902.WPD

Nøgleord: hfab adfg

1. Indledning

Det vises, at OLS-estimatoren i tilfældet med kointegration og korrelation mellem regressorer og restled kan gøres konsistent med en simpel transformation af restleddet. Endvidere vises, at de sædvanlige *t*- og *F*-tests fortsat er assymptotisk gyldige i det kointegrerede tilfælde.

2. Model

Antag, at vi ønsker at estimere parametrene i den lineære model

$$y_t = \beta' \boldsymbol{x}_t + u_t \tag{1}$$

hvor u_t er iid$(0,\sigma^2)$, $\boldsymbol{x}_t$ er en (kx1) vektor, og $\beta \neq 0$ er en (k x 1) parametervektor. Det antages, at elementerne i $\boldsymbol{x}_t$ følger en random walk og ikke kointegrerer indbyrdes. Ligeledes antages, at y_t er en I(1) proces, således at $(1,-\beta)$ er en kointegrations vektor. Det antages samtidig, at der ikke findes flere uafhængige kointegrerende vektorer.

Antagelsen vedrørende $\boldsymbol{x}_t$ betyder, at

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_{s=1}^{t} \boldsymbol{\varepsilon}_s \tag{2}$$

hvor ε_t er iid$(0, \Sigma_{11})$ og $\boldsymbol{x}_0 = 0$.

Definer nu processen $\xi = (\varepsilon'_t, u_t)'$ med dimension $((k+1)$ x1) med kovariansmatrix

$$\Sigma = E[\xi\xi'] = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \sigma^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

hvor $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} \neq 0$ som følge af korrelationen mellem u_t og ε_t. Det gælder da, som det er tilfældet for OLS-estimatoren i tilfældet med stationære regressorer, at OLS-estimatoren er inkonsistent.

Betragt igen modellen (1), og foretag følgende omskrivning

$$\begin{aligned} & y_t = \beta' \boldsymbol{x}_t + u_t \Leftrightarrow \\ & y_t = \beta' \boldsymbol{x}_t + \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t + u_t - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t \Leftrightarrow \\ & y_t = \beta' \boldsymbol{x}_t + \gamma\Delta\boldsymbol{x}_t + u_{.1t} \end{aligned} \tag{4}$$

hvor $\gamma = \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}$ og $u_{.1t} = u_t - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}$, og det fra definitionen af $\boldsymbol{x}_t$ gælder, at $\Delta\boldsymbol{x}_t = \varepsilon_t$. Det ses, at i modellen (4) er $\Delta\boldsymbol{x}_t$ indført som regressor, mens restleddet er transformeret.

Defineres processen $\rho = (\varepsilon_t, u_{.t})'$, findes det, at

$$\tilde{\Sigma} = E[\rho\rho'] = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \tilde{\Sigma}_{12} \\ \tilde{\Sigma}_{21} & \sigma^2_{2.1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \mathbf{0}_{(kx1)} \\ \mathbf{0}_{(1xk)} & \sigma^2_{.1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

idet $\tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{\Sigma}_{21} = E[\boldsymbol{\varepsilon}_t(u_t - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t)] = E[\Sigma_{12} - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{11}] = \mathbf{0}$, og det følger da, at restled og regressorer i (1.4) er ukorrelede og kovariansmatricen $E[\rho\rho'] = \text{diag}(\Sigma_{11}, \sigma_{.1}^2)$.

3. OLS-estimatorens egenskaber

Det skal nu vises, at OLS-estimatoren er konsistent og inferens vedrørende parametrene i β-vektoren kan baseres på de sædvanlige *t*- og *F*-tests.

Konsistens

Konstruer wienerprocessen (se appendiks) med samme kovariansmatrix som ρ, $\boldsymbol{w}(r,\tilde{\Sigma})$, der kan partitioneres i to ikke-korrelerede processer $\mathbf{w}_1(r,\Sigma_{11})$ og $w_2(r,\sigma_{.1}^2)$.

Definer matricerne $\boldsymbol{y}_{(Tx1)} = (y_1,....,y_T)$, $\boldsymbol{u}_{.1} = (u_{.11},....,u_{.1T})'_{(Tx1)}$, $\boldsymbol{x}_{(Txk)} = (\boldsymbol{x}_1,....,\boldsymbol{x}_T)$ og $\Delta\mathbf{x}_{(Txk)} = (\Delta\boldsymbol{x}_1,...., \Delta\boldsymbol{x}_T)$. Ved partitioneret regression findes det, at OLS-estimatoren for β kan skrives

$$\begin{aligned} &\hat{\beta} = (\boldsymbol{x}'M\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'M\boldsymbol{y} \Leftrightarrow T(\hat{\beta}-\beta) = (T^{-2}\boldsymbol{x}'M\boldsymbol{x})^{-1}T^{-1}\boldsymbol{x}'M\boldsymbol{u}_{.1}, \quad \textit{hvor} \\ &M = I_T - \Delta\boldsymbol{x}'(\Delta\boldsymbol{x}'\Delta\boldsymbol{x})^{-1}\Delta\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{6}$$

Første faktor i ligning (6) kan omskrives som følger

$$T^{-2}\boldsymbol{x}'M\boldsymbol{x} = T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} - T^{-2}\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{x}(T^{-1}\Delta\boldsymbol{x}'\Delta\boldsymbol{x})^{-1}T^{-1}\Delta\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} \tag{7}$$

hvor det fra Lemma 1 (se appendiks) findes

$$T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = \sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t' \Rightarrow \int_0^1 \boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})\boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})'dr \tag{8}$$

hvor $\Rightarrow$ betegner konvergens i fordeling (mest fordi jeg ikke kan få lavet en pil man må skrive *D* over i wp). Andet led i (7) går mod nul for $T \Rightarrow \infty$, idet første faktor konvergerer mod nul, mens de to sidste faktorer konverergerer mod “et eller andet endeligt”.

Tilsvarende findes, at anden faktor i ligning (6) kan omskrives som følger

$$T^{-1}\boldsymbol{x}'M\boldsymbol{u}_{.1} = T^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{u}_{.1} - T^{-1}\boldsymbol{x}'\Delta\boldsymbol{x}(T^{-1}\Delta\boldsymbol{x}'\Delta\boldsymbol{x})^{-1}T^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}_{.1} \tag{9}$$

Fra Lemma 1 findes vedrørende første led i (9)

$$T^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}_{.1} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_t u_{.1t} \Rightarrow \int_0^1 \boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})dw_2(r,\sigma_{.1}^2) \tag{10}$$

mens andet led i (9) konveregerer mod nul, idet $\Delta\mathbf{x}_t$ og $u_{.1t}$ er ukorrelerede, mens de to første faktorer konvergerer mod “et eller andet endeligt”.

Samlet findes det, at

$$T(\hat{\beta}-\beta) \Rightarrow \left(\int_0^1 \boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})\boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})'dr\right)^{-1}\left(\int_0^1 \boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})dw_2(r,\sigma_{.1}^2)\right) = \zeta \tag{11}$$

Fra Lemma 2 findes så, at

$$\begin{aligned} &\zeta \sim N(0,\sigma_{.1}^2 G|G), \quad hvor \\ &G = \int_0^1 \boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})\boldsymbol{w}_1(r,\Sigma_{11})'dr \end{aligned} \tag{12}$$

Idet ζ er blandende normalfordelt med middelværdi nul, er OLS-estimatoren konsistent i den forstand, at den forventede afvigelse fra den sande værdi af β er nul. Enndvidere bemærkes det fra ovenstående, at estimatoren konvergerer med hastighed T, mens OLS estimatoren konvergerer med hastighed $\sqrt{T}$ i tilfældet med stationære regressorer.

Inferens
Den sædvanlige F-teststørrelse, for hypotesen $H_0 : H\beta\text{-}h = 0$, hvor H er en (jxk) vektor, og h er en (jx1) vektor, er

$$\begin{aligned} jF &= s_{.1}^{-2}(H\hat{\beta}-h)'\left(H\left(\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t'\right)^{-1}H'\right)(H\hat{\beta}-h) \Leftrightarrow \\ jF &= s_{.1}^{-2}(\hat{\beta}-\beta)'H'\left(H\left(\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t'\right)^{-1}H'\right)H(\hat{\beta}-\beta) \Leftrightarrow \\ jF &= s_{.1}^{-2}T(\hat{\beta}-\beta)'H'\left(H\left(T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t'\right)^{-1}H'\right)TH(\hat{\beta}-\beta) \end{aligned} \tag{13}$$

hvor $s_{.1}$ er den estimerede standardafvigelse.

Under H_0 gælder det, at

$$TH(\hat{\beta}-\beta) \Rightarrow N_j(0,\sigma^2_{.1}HGH^{/}|G) \tag{14}$$

Derfor gælder det jf Lemma 3 og (13), at

$$T(H\hat{\beta}-h) \Rightarrow N_j(0,\sigma^2_{.1}HGH^{/}|G) \tag{15}$$

Standardiseres denne fås

$$(\sigma^2_{.1}HGH^{/})^{-\frac{1}{2}}T(H\hat{\beta}-h) \Rightarrow N_j(0,I_j) \tag{16}$$

Ligning (13a) kan i grænsen skrives

$$\left((\sigma^2_{.1}HGH^{/})^{-\frac{1}{2}}T(H\hat{\beta}-h)\right)^{/}\left((\sigma^2_{.1}HGH^{/})^{-\frac{1}{2}}T(H\hat{\beta}-h)\right) = \tag{17}$$

$$s^2_{.1}(H\hat{\beta}-h)^{/}(HGH^{/})^{-1}(H\hat{\beta}-h) \sim \chi^2(j) \tag{18}$$

Ligning (17) er således kvadratsummen af j uafhængige normalfordelte variabler, og det gælder derfor, at $jF \sim \chi^2(j)$. Det gælder specielt, at når H er en enhedsvektor, så er (16) N(0,1) fordelt, således at inferens vedrørende de enkelte parameterestimater kan baseres på den standardiserede normalfordeling. Endlig bemærkes det, at anvendelsen af t- og F-statistikkerne kræver, at $s_{.1}^2$ er en konsistent estimator for $\sigma_{.1}^2$, hvilket er opfyldt for $s^2_{.1}=(T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\beta^{/}\boldsymbol{x}_t)^2)$ eventuelt med en small sample korrektion.

For forklarende I(1)-variabler, der ikke er korreleret med restleddet, gælder resultaterne vedrørende konsistens og inferens også. For disse variable er det unødvendigt, at medtage ændringerne i regressionen, da kovariansmatricen er blokdiagonal i disse variabler uden korrektionen.

Modellen kan uden problemer udvides til at omfatte tilfældet, hvor den datagenererende mekanisme er en random walk med drift. Det vil sige tilfældet, hvor (2) udvides til også at omfatte en konstant.[1]

[1]Det er vist endda sådan, at OLS-estimatorens assymptotiske egenskaber er de samme i tilfældet, hvor DGP er en random walk med drift, og tilfældet med trends stationære regressorer., hvilket skyldes, at den deterministiske trend dominerer den stokastiske trend.

4. Misspecifikations tests

De ovenstående resultater hviler på tre antagelser

1) Den forklarede variable kointegrerer med de forklarende variable
2) De forklarende variable kointegrerer ikke indbyrdes
3) Kointegrationsrangen er højest 1

Punkt 1) kan vist nok testes under antagelse af 2) og 3), se eventuelt Tanaka 1996. Tests af to og tre kræver estimation af det samlede system med efterfølgende rang-test og identifikation af den/de kointegrerende vektor(er). Det er selvfølgeligt muligt at estimere en VAR-model for de relevante variable inden regressionen af (1) eller (4). I praksis er det formentlig tilstrækkeligt, som det er tilfældet i alle vores fejlkorrektionsestimationer, blot at antage, at antagelserne er opfyldt?

Man bør måske ligeledes starte analysen med, at undersøge, hvilke variabler, der må bedst beskrives som I(1)-processer. fx med DF- eller ADF-tests?

5. Konklusioner

Det er i det ovenstående vist, at man i tilfældet, hvor man ønsker at estimere en kointegrerende vektor i en lineær enkeltligninsregression, hvor regressorer og restled er korreleret, kan sikre at OLS-estimatoren er konsistenrt, ved at medtage ændringerne i de af de ikke-stationære variabler, der er korreleret med restleddet, i regressionen.

Metoden som gennemgået her lægger op til, at der estimeres i to-trin. Man kan måske udvide resultaterne til et-trins estimationer for at opnå større fleksibilitet.

Resultatet er fx bekvemt ved estimation af lønrelationer, hvor et indkomstafhængigt skattesystem er medtaget i de forklarende variable. Forudsat man kan sandsynliggøre at disse variable er random walks.

Litteratur

Green W. (1993), Econometric Analysis 2. edition, Pretice- Hall International

Hatanaka M. (1996), Time-series-based Econometrics - Unit roots and Cointgration, Oxford University Press, Oxford.

Yoon Y. P. (1992), Canonical Cointegrating regressions, Econometrica vol. 60

Tanaka K. (1996), Time Series Analysis - Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory, John Wiley and Sons. Inc

Appendiks

Definition 1
Den p-dimensionale wienerproces $\mathbf{w}(r,\Sigma)$ for $r \in [0,1]$ *og kovariansmatrix* Σ er defineret som en stokastisk proces, der opfylder:

1. $\mathbf{w}(0,\Sigma) = 0$
2. $\mathbf{w}(r,\Sigma) \sim N_p(0,r\Sigma)$
3. *Tilvæksterne i* $\mathbf{w}(r,\Sigma)$ *er uafhængige af* r
4. $\mathbf{w}(r,\Sigma)$ *er kontinuert i* r

For $\Sigma = I_p$ *kaldes* $\mathbf{w}(r)$ *den standardiserede r-proces. Wienerprocessen med kovarians* Σ *kan skrives* $\Sigma^{½}\mathbf{w}(r)$.

Lemma 1
Betragt den k-dimensionale vektorproces $\{\varepsilon_t\} \sim iid(0,\Sigma)$, *og definer* $\boldsymbol{v}_t = \sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s$, *med elementer* $v_{it} = \sum_{s=1}^{t} \varepsilon_{is}$, $i = 1,\ldots,k$ og den *k-dimensionale wienerproces* $\mathbf{w}(r,\Sigma)$, *da gælder for* $T \rightarrow \infty$

$$T^{-\frac{3}{2}}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{v_t} \Rightarrow \int_0^1 \boldsymbol{w}(r,\Sigma)dr \tag{20}$$

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{v_t}\boldsymbol{v_t}' \Rightarrow \int_0^1 \boldsymbol{w}(r,\Sigma)\boldsymbol{w}(r,\Sigma)'dr \tag{2}$$

$$T^{-1}\sum_{t=1} \boldsymbol{v_{t-1}}\boldsymbol{\varepsilon_t}' \Rightarrow \int_0^1 \boldsymbol{w}(r,\Sigma)d\boldsymbol{w}(r,\Sigma)' \tag{3}$$

hvor $\rightarrow$ betegner konvergens i fordeling.

Lemma 2
Betragt en $(k+1)$*-dimensional wienerproces* $\mathbf{w}(r,\Sigma)$. *Partitioner* $\mathbf{w}(r,\Sigma)$ *i* $\mathbf{w}_1(r_1,\Sigma_{11})$ *og* $w_2(r_2,\sigma_{22})$, *hvor* $\mathbf{w}_1(r_1,\Sigma_{11})$ *er en k-dimensional proces og* $w_2(r_2,\sigma_{22})$ *er en skalar proces. Antag, at* $\Sigma = diag(\Sigma_{11},\sigma_{22})$, *da gælder, for*

$$\int_0^1 \boldsymbol{w_1}(rsub1,\Sigma_{11})dw_2(r_2,\sigma_{22}) = \zeta \tag{22}$$

at $\zeta \sim N_k(0,\sigma_{22}G|G)$, *hvor* $G = \int_0^1 \boldsymbol{w_1}(r,\Sigma_{11})\boldsymbol{w_1}(r,\Sigma_{11})'dr$. *ζ's fordeling kaldes blandende normalfordelt.*

Lemma 3
Betragt en stokastisk variabel z_t *for hvilke det gælder, at* $z_t \rightarrow z$, *hvor* $\rightarrow$ *betegner konvergens i fordeling og lad* h *være en kontinuert funktion, så gælder, at* $h(z_t) \rightarrow h(z)$.