Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Dorte Grinderslev

20. januar 2002

Lidt om Törnqvist-prisindeks og effektivitetsindeks

Resumé:

I papiret ses på muligheden for at effektivitetskorrigere et Törnqvist-prisindeks med henholdsvis fast base og et kædeprisindeks.

Vi betragter to konkrete tilfælde i ADAM:

- *Erhvervenes energiefterspørgsel,* fVe_j
- *Husholdningernes transportdelmodel for fCg og fCk*

Vi viser,

- *at med en simpel approksimation er det muligt at opstille en lineær estimationsligning, hvorefter der kan omregnes til parametrene i effektivitetsindekset, således at Törnqvist-prisindekset kan antages eksogent i estimationen*
- *det generelle resultat, at i fordelingssystemer (fx fCg og fCk) skal Törnqvist-prisindekset ikke effektivitetskorrigeres, hvis de underliggende effektivitetsindeks er pålagt en restriktion, således at de kun er faktorforvridende*

DGR20102.WPD

Nøgleord: Produktion og faktorefterspørgsel, Forbrug og opsparing, Datakonstruktion

1. Indledning

Dette papir diskuterer problemstillingen med at effektivitetskorrigere et Törnqvist-prisindeks. Vi starter dog to skridt før og opskriver i afsnit 2 Törnqvist-prisindeks formuleret henholdsvis med fast base og som et kædeprisindeks, hvorefter vi i afsnit 3 genkalder idéen med effektivitetskorrigering af efterspørgselsligninger. Kombinationen af Törnqvist-prisindeks og effektivitetskorrigering er indholdet af afsnit 4. Resultaterne opsummeres i afsnit 5.

På flere projekter arbejdes for tiden med i CES-efterspørgselsligninger at erstatte relativprisen, der er et CES-prisindeks, med et tilsvarende Törnqvist-prisindeks, der ikke afhænger af de estimerede parametre, (hvorfor kan læses i afsnit 2.4, bilag A eller i de relevante arbejdspapirer).

Grunden til, at vi overhovedet tager problemstillingen med effektivitetskorrigering af Törnqvist-prisindeks op, er, at i forsøget med at anvende Törnqvist-prisindeks som prisdeflator i ADAM's energiligninger, jf. LNI18d01, blev det konstateret, at det ikke umiddelbart var muligt at lave et steady-state grundforløb med konstant prisforhold mellem energiprisen og relativprisen, der er vægtet af prisen på maskinkapital, arbejdskraft og energi. I et sædvanligt ADAM-grundforløb har lønnen en højere vækstrate end priserne på kapital og energi, mens vækstraten i de effektivitetskorrigerede priser er ens. Derfor burde Törnqvist-prisindekset effektivitetskorrigeres.

Dette bunder egentligt i et kendt aggregeringsproblem, for det kan vises, at det kun er teoretisk korrekt at aggregere faktorer med et mængdeindeks, hvis de faktorer, der aggregeres, har samme effektivitetsudvikling, (hvilket fx ikke er tilfældet for maskinkapital og arbejdskraft), jf. EMMA-bogen appendiks A.2.1.

2. Törnqvist-prisindeks

Vi ønsker at danne en pris på et aggregat af n varer, og her fokuserer vi på Törnqvist-prisindeks. Törnqvist-prisindekset givet ved (1) i tilfældet med to perioder og n varer, x_i, med pris p_i, jf. fx Lars Otto's note s.9.

Törnqvist-prisindekset vægter prisændringerne for de forskellige faktorer med deres omkostningsandele, s_i. Toptegn angiver året, $t=0,1$. Prisindekset afhænger af vektoren af priser, $p^t = (p_1^t, \ldots, p_n^t)$, og vektoren af mængder, $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$, i begge perioder. Prisindekset angiver ændringen i prisen på aggregatet fra periode 0 til periode 1.

$$P_{Törn}(p^0, p^1, x^0, x^1) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_i^0 + s_i^1\right)} \qquad \text{hvor} \quad s_i^t = \frac{p_i^t x_i^t}{\sum_j p_j^t x_j^t} \tag{1}$$

Törnqvist-prisindekset er et specielt geometrisk prisindeks, hvor vægtene varierer. Et almindeligt geometrisk prisindeks er givet ved nedenstående, hvor $\alpha_i > 0$ og $\Sigma_i \alpha_i = 1$, (hvilket gennemsnittet af omkostningsandelene opfylder).

$$P_{Geo}(p^0, p^1, x^0, x^1) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\alpha_i} \tag{2}$$

2.1. Kædeindeks

For at danne et prisindeks mellem flere perioder kan benyttes et *kædeindeks*, jf. fx Diewert (1987) afsnit 6, hvor fx $P(p^1, p^2, x^1, x^2)$ er prisændringen fra periode 1 til periode 2.

$$\begin{aligned}
P_{kæde}^1 &= 1 \\
P_{kæde}^2 &= P(p^1, p^2, x^1, x^2) \\
P_{kæde}^3 &= P(p^2, p^3, x^2, x^3) \cdot P(p^1, p^2, x^1, x^2) = P(p^2, p^3, x^2, x^3) \cdot P_{kæde}^2 \\
P_{kæde}^4 &= P(p^3, p^4, x^3, x^4) \cdot P_{kæde}^3 \\
&\text{osv.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Et Törnqvist-kædeprisindeks, $P_{Törn,kæde}^t$, kan altså bestemmes ved

$$\begin{aligned}
P_{Törn,kæde}^1 &= 1 \\
P_{Törn,kæde}^t &= P_{Törn,kæde}^{t-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^t}{p_i^{t-1}} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_i^{t-1} + s_i^t\right)}
\end{aligned} \tag{4}$$

Hvis vi ikke er tilfredse med standardnormeringen $P_{Törn,kæde}^1 = 1$, dvs. 1 i fx 1966, kan hele serien efterfølgende divideres med $P_{Törn,kæde}^{1995}$, så indekset er 1 i 1995.

Det intuitive i Törnqvist-kædeprisindekset er, at vækstraten i indekset er en vægtet sum af vækstraterne i de priser, der aggregeres. Vægtene er de tilhørende omkostningsandele (set som gennemsnit over to perioder).

$$\text{Dlog}\left(P_{Törn,kæde}^t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(s_i^{t-1} + s_i^t\right) \cdot \text{Dlog}\left(p_i^t\right) \tag{5}$$

2.2. Prisindeks med fast base

I stedet for et kædeindeks kan vælges et prisindeks med fast base, i bøgerne vil det typisk være år 1, men vi vil nok vælge NR-basisåret 1995. Referencen er også her Diewert (1987) afsnit 6.

Törnqvist-prisindekset med fast base til tid t er givet ved (6) og antager, pr. konstruktion, værdien 1 i 1995.

$$P^{t}_{Törn,1995} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^{\,t}}{p_i^{\,1995}} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_i^{\,1995}+s_i^{\,t}\right)} \tag{6}$$

I omtalte reference anbefales det at bruge enten et kædeindeks eller et indeks med fast base.

2.3. Implicit mængdeindeks

Det tilhørende mængdeindeks beregnes implicit ud fra omkostningerne, $C = \sum_i x_i \cdot p_i$, og Törnqvist-prisindekset (henholdsvis kædeindeks og fastbase), således at pris gange mængde er lig med omkostningerne.

$$X^{t}_{Törn} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{\,t} \cdot p_i^{\,t} \right) / P^{t}_{Törn} \tag{7}$$

Alternativt kunne dannes et Törnqvist-mængdeindeks, hvorefter Törnqvist-prisindekset bestemmes implicit.

2.4. Hvorfor bruge Törnqvist-prisindeks?

I dette papir ses på to eksempler i Modelgruppens arbejde, hvor det foreslås at benytte et Törnqvist-prisindeks, henholdsvis i erhvervenes energirelationer, jf. LNI18d01, og fordelingen af husholdningernes udgift til benzin og kollektiv transport, jf. RHM25101.

I begge tilfælde tages der udgangspunkt i en CES-efterspørgselsfunktion, hvor relativprisen, i følge den teoretiske udledning, er et CES-prisindeks, der afhænger af estimerede parametre. I energiligningerne er det et nestet CES-prisindeks over priserne på maskinkapital, arbejdskraft og energi, mens det i transportdelmodellen er priserne på henholdsvis benzin og kollektiv transport.

For at forenkle estimationsligningerne kan det vælges at anvende et alternativt prisindeks, der ikke afhænger af de estimerede parametre, hvorved det ofte er muligt at estimere ligningen lineært, jf. bilag A. Prisindekset dannes i data-konstruktionen og antages eksogent i estimationen.[1]

At der bør vælges et Törnqvist-prisindeks fremfor andre prisindeks, fx Laspeyres, Paasche eller Fisher, bygger på dette indeks's kønne egenskaber, som vi ikke vil belemre læseren med her; interesserede henvises til fx EMMA-bogen appendiks A.2.1. og Diewert (1987).

---

[1]Læg mærke til denne antagelse! Fx i transportdelmodellen er prisindekset vægtet af priserne på benzin og kollektiv transport, hvor vægtene er omkostningsandelene, men prisindekset bruges til at bestemme efterspørgslen efter benzin og kollektiv transport, hvorved omkostnings-andelene *ikke* er eksogene i estimationen.

3. Effektivitetskorrigering

Idéen med at benytte effektivitetsindeks i efterspørgselsligninger - i stedet for blot at tilføje en lineær eller kvadratisk tidstrend - er, at producenten/forbrugeren tænker i ydelsen af faktorerne/varen, hvorfor vi ser på effektivitetskorrigerede mængder og priser. Efterspørgselsfunktionerne kan udledes uden tanke på effektivitetskorrigering, hvorefter de effektivitetskorrigerede mængder og priser blot indsættes i efterspørgselsfunktionerne i stedet, jf. fx ADAM-bogen kapitel 8 og referencer deri.

Vi betragter de *effektivitetskorrigerede* mængder og priser; med e et effektivitetsindeks er de givet ved $\tilde{X} = X \cdot e$ og $\tilde{P} = P/e$, (en ~ over en variabel angiver, at den er effektivitetskorrigeret). Dermed er omkostningerne upåvirkede af effektivitetskorrigeringen, $C = X \cdot P = (X \cdot e) \cdot (P/e) = \tilde{X} \cdot \tilde{P}$. Sædvanligvis lader vi effektivitetsindekset være en kvadratisk tidstrend, dvs. $\log(e) = \omega_1 t + \frac{1}{2}\omega_2 t^2$. I tilfældet med en enkelt log-lineær efterspørgselsfunktion kan det vises, at man i stedet kan estimere lineært med t og t^2 som ekstra regressorer og bagefter omregne til parametrene i effektivitetsindekset.

Som et eksempel ser vi på tilfældet, hvor efterspørgslen efter en faktor X beskrives ved følgende langsigtssammenhæng, hvor P_X er prisen på faktoren, X^* er langsigtsefterspørgslen (den *ønskede* efterspørgsel), Y og P_Y er henholdsvis det relevante produktionsbegreb og prisdeflator.

$$\log(X^*) = \log(Y) + \beta \cdot \log\left(\frac{P_X}{P_Y}\right) + \alpha \tag{8}$$

Indsættes nu effektivitetskorrigerede mængder og priser for X, får vi

$$\begin{aligned}
\log(X^* \cdot e) &= \log(Y) + \beta \cdot \log\left(\frac{P_X/e}{P_Y}\right) + \alpha & \Leftrightarrow \\
\log(X^*) &= \log(Y) + \beta \cdot \log\left(\frac{P_X}{P_Y}\right) + \alpha - (1+\beta) \cdot \log(e) & \Leftrightarrow \\
\log(X^*) &= \log(Y) + \beta \cdot \log\left(\frac{P_X}{P_Y}\right) + \alpha - (1+\beta) \cdot (\omega_1 t + \tfrac{1}{2}\omega_2 t^2)
\end{aligned} \tag{9}$$

eller opskrevet direkte som

$$\log(X^*) = \log(Y) + \beta \cdot \log\left(\frac{P_X}{P_Y}\right) + \alpha + k_1 \cdot t + k_2 \cdot t^2 \tag{10}$$

Dvs. vi kan beregne parametrene i effektivitetsindekset ud fra de direkte estimerede parametre ved

$$\omega_1 = -\frac{k_1}{1+\beta} \quad \text{og} \quad \omega_2 = -\frac{2 \cdot k_2}{1+\beta} \tag{11}$$

4. Kombination af Törnqvist-prisindeks og effektivitetsindeks

I dette afsnit diskuteres, hvorledes effektivitetsindeks kan indarbejdes i relationer, hvor relativ-prisen er givet ved et Törnqvist-prisindeks. Konkret ses på to tilfælde, først hvor Törnqvist-prisindekset er et aggregat af eksogene priser og en pris, der indgår i ligningen (erhvervenes energiefterspørgsel), og dernæst tilfældet hvor Törnqvist-prisindekset udelukkende består af priser, der selv indgår i modelligningerne (husholdningerns transport-delmodel). Men vi starter med at opskrive de generelle formler for et effektivitetskorrigeret Törnqvist-prisindeks og give et simpelt eksempel.

4.1. Effektivitetskorrigeret Törnqvist-prisindeks

Vi opskriver først det effektivitetskorrigerede Törnqvist-prisindeks med fast base, $\tilde{P}^{t}_{Törn,1995}$, ved at indsætte effektivitetskorrigerede priser i formlen for fastbase-prisindekset (6).[2]

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{t}_{Törn,1995} &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\tilde{p}_i^{\,t}}{\tilde{p}_i^{\,1995}} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_i^{1995}+s_i^{t}\right)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^{\,t}/e_i^{\,t}}{p_i^{1995}/e_i^{1995}} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_i^{1995}+s_i^{t}\right)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^{\,t}}{p_i^{1995}} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_i^{1995}+s_i^{t}\right)} \cdot \left(\frac{e_i^{\,t}}{e_i^{1995}} \right)^{-\frac{1}{2}\left(s_i^{1995}+s_i^{t}\right)} \qquad (12) \\
&= P^{t}_{Törn,1995} \cdot \left(\frac{e_i^{\,t}}{e_i^{1995}} \right)^{-\frac{1}{2}\left(s_i^{1995}+s_i^{t}\right)}
\end{aligned}$$

Tilsvarende udregninger giver det efffektivitetskorrigerede Törnqvist-kædeprisindeks, hvor vi indsætter effektivitetskorrigerede priser i ligning (5).

$$\mathrm{Dlog}\left(\tilde{P}^{t}_{Törn,kæde}\right) = \mathrm{Dlog}\left(P^{t}_{Törn,kæde}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(s_i^{\,t-1}+s_i^{\,t}\right)\mathrm{Dlog}(e_i^{\,t}) \qquad (13)$$

Eksempel, hvor priserne i prisindekset *ikke* indgår direkte i ligningen

Hvis de priser, der indgår i prisindekset, ikke også indgår direkte i efterspørgselsligningen, skal de 'blot' effektivitetskorrigeres, når prisindekset beregnes. Et tænkt eksempel kunne være, at vi skulle bruge et prisindeks over maskinkapital og arbejdskraft, P_{KL}, i en efterspørgselsligning for en anden produktionsfaktor. Vi har estimeret effektivitetsindeks for maskinkapital og arbejdskraft i faktorblokken og anvender disse. Fx bliver det effektivitetskorrigerede Törnqvist-kædeprisindeks

$$\tilde{P}^{t}_{KL} = \tilde{P}^{t-1}_{KL} \cdot \left(\frac{p_K^{\,t}/e_K^{\,t}}{p_K^{\,t-1}/e_K^{\,t-1}} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_K^{\,t-1}+s_K^{\,t}\right)} \cdot \left(\frac{p_L^{\,t}/e_L^{\,t}}{p_L^{\,t-1}/e_L^{\,t-1}} \right)^{\frac{1}{2}\left(s_L^{\,t-1}+s_L^{\,t}\right)} \qquad (14)$$

---

[2]Bemærk, at omkostningsandelene er uafhængige af effektivitetskorrigering.

$$\tilde{s}_i^{\,t} = \frac{\tilde{p}_i^{\,t}\tilde{x}_i^{\,t}}{\sum_j \tilde{p}_j^{\,t}\tilde{x}_j^{\,t}} = \frac{(p_i^{\,t}/e_i^{\,t})\cdot(x_i^{\,t}e_i^{\,t})}{\sum_j (p_j^{\,t}/e_j^{\,t})\cdot(x_j^{\,t}e_j^{\,t})} = \frac{p_i^{\,t}x_i^{\,t}}{\sum_j p_j^{\,t}x_j^{\,t}} = s_i^{\,t}$$

4.2. Én af priserne i Törnqvist-prisindekset indgår direkte i ligningen

Vi ser på den alternative formulering af ADAM's energiligninger, som foreslås i LNI18d01. Den teoretisk korrekte relativpris, jf. ADAM-bogen afsnit 8.B, er et nestet CES-prisindeks, der sammenvejer priserne på *K*, *L* og *E*. Dette prisindeks afhænger ikke blot af parametrene i energiligningen, men også af parametrene i ligningerne for *K* og *L*, så det kan kun benyttes, hvis efterspørgslen efter de tre faktorer estimeres i et simultant system. Hidtil er det valgt at anvende BFI-deflatoren, *pyf*, i stedet for CES-prisindekset, (således at energiligningen kan estimeres alene), men i ovennævnte papir foreslås det at anvende et Törnqvist-prisindeks.

P_{KLE} er et Törnqvist-prisindeks over priserne på *K*, *L* og *E*, $P_{KLE} = P_{Törn}(P_K, P_L, P_E)$. Prisindekset afhænger ikke af estimerede parametre, og den langsigtede efterspørgselsligning (15) kan estimeres lineært.

$$\log(E^*) \;=\; \alpha \;+\; \log(Y) \;+\; \beta \cdot \log\left(\frac{P_E}{P_{KLE}}\right) \tag{15}$$

Nu vil vi så indføre effektivitetskorrigerede mængder og priser, $\tilde{E} = E \cdot e_E$ og $\tilde{P}_E = P_E / e_E$. Hvis vi et øjeblik glemmer, at P_{KLE} også bør effektivitetskorrigeres, (hvilket vi længe har glemt...), så kan (15) omskrives til (16), der med en passende formulering af e_E kan estimeres lineært, jf. (9) og (10).

$$\log(E^*) \;=\; \alpha \;+\; \log(Y) \;+\; \beta \cdot \log\left(\frac{P_E}{P_{KLE}}\right) \;-\; (1+\beta) \cdot \log(e_E) \tag{16}$$

Vil vi også effektivitetskorrigere P_{KLE}, får vi $\tilde{P}_{KLE} = P_{Törn}(P_K/e_K, P_L/e_L, P_E/e_E)$. Vi kan bruge e_K og e_L fra faktorblok-estimationen, så de kan antages eksogene her,[3] men e_E, der skal estimeres i (16), indgår jo også, så $\tilde{P}_{KLE}$ kan ikke være eksogen i estimationen.

Et alternativ er at bruge (16) og fortolke e_E som energiens effektivitet relativt til effektiviteten af aggregatet af *K*, *L* og *E*. Dette er umiddelbart oplagt, men i klar strid med opfattelsen af, at effektivitetsindeksene faktisk *kan* fortolkes som energiens egen-effektivitet! Så den løsning vil vi nødigt benytte.

Vi kan som Törnqvist-prisindeks vælge mellem et kæde-prisindeks (4) eller et fastbase-prisindeks (6). Øvelsen går nu ud på at hive e_E ud af $\tilde{P}_{KLE}$, således at det resterende prisindeks kan antages eksogent i estimationen; vi betegner dette $\hat{P}_{KLE} \equiv P_{Törn}(P_K/e_K, P_L/e_L, P_E) = P_{Törn}(\tilde{P}_K, \tilde{P}_L, P_E)$, hvor priserne på kapital og arbejdskraft effektivitetskorrigeres, men ikke prisen på energi.

[3] Selvom forfatteren, som estimatør af faktorblokken, ikke er helt tryg ved, at vi skal estimere på dem!

Fastbase-prisindeks

Det effektivitetskorrigerede fastbase-prisindeks kan skrives som (17), hvis vi sørger for at normere $e_E^{1995} = 1$.

$$\begin{aligned}\log(\tilde{P}^t_{KLE,1995}) &= \sum_{i=K,L} \tfrac{1}{2}\left(s_i^{1995} + s_i^{\,t}\right)\cdot \log\left(\frac{\tilde{P}_i^{\,t}}{\tilde{P}_i^{\,1995}}\right) \\ &+ \tfrac{1}{2}\left(s_E^{1995} + s_E^{\,t}\right)\cdot\log\left(\frac{P_E^{\,t}}{P_E^{\,1995}}\right) - \tfrac{1}{2}\left(s_E^{1995} + s_E^{\,t}\right)\cdot\log\left(e_E^{\,t}\right) \\ &= \log(\hat{P}^t_{KLE,1995}) - \tfrac{1}{2}\left(s_E^{1995} + s_E^{\,t}\right)\cdot\log\left(e_E^{\,t}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

Nu er vi der næsten, så lad os til estimationen af energieffektiviteten sætte $s_E^{\,t} = s_E^{1995}$, hvorved det effektivitetskorrigerede Törnqvist-prisindeks approksimativt er

$$\log(\tilde{P}^t_{KLE,1995}) \approx \log(\hat{P}^t_{KLE,1995}) - s_E^{1995}\cdot\log(e_E^t) \tag{18}$$

Derved kan vi opskrive følgende estimationsligning, hvor $\hat{P}_{KLE,1995}$ er eksogent. Med ovennævnte passende formulering af e_E kan ligningen estimeres lineært.

$$\begin{aligned}\log(E^*) &= \alpha + \log(Y) + \beta\cdot\log\left(\frac{P_E}{\tilde{P}_{KLE,1995}}\right) - (1+\beta)\cdot\log(e_E) \\ &\approx \alpha + \log(Y) + \beta\cdot\log\left(\frac{P_E}{\hat{P}_{KLE,1995}}\right) - (1+\beta-\beta\cdot s_E^{1995})\cdot\log(e_E)\end{aligned} \tag{19}$$

Altså benyttes de effektivitetskorrigerede priser på kapital og arbejdskraft, når prisindekset beregnes, energiefterspørgselsligningen estimeres lineært, og parametrene til t og t^2 omregnes til parametre i effektivitetsindekset, hvor der udover den sædvanlige korrektion med priselasticiteten, β, også korrigeres med omkostningsandelen ud fra nedenstående sammenhæng

$$\begin{gathered} -(1+\beta-\beta\cdot s_E^{1995})\cdot(\omega_1 t + \tfrac{1}{2}\omega_2 t^2) = \kappa_1 t + \kappa_2 t^2 \quad\Leftrightarrow \\ \omega_1 = -\frac{\kappa_1}{1+\beta-\beta\cdot s_E^{1995}} \quad \text{og} \quad \omega_2 = -\frac{2\cdot\kappa_2}{1+\beta-\beta\cdot s_E^{1995}}\end{gathered} \tag{20}$$

Kædeprisindeks

Vi gennemfører nu de tilsvarende udregninger i tilfældet med et kædeprisindeks. Det effektivitetskorrigerede Törnqvist-kædeprisindeks er givet ved (21).

$$\log(\tilde{P}^{t}_{KLE,kæde}) = \log(\tilde{P}^{t-1}_{KLE,kæde}) + \sum_{K,L} \tfrac{1}{2}(s_i^{t-1}+s_i^{t})\log\left(\frac{\tilde{P}^{t}_{i}}{\tilde{P}^{t-1}_{i}}\right) + \tfrac{1}{2}(s_E^{t-1}+s_E^{t})\log\left(\frac{P^{t}_{E}}{P^{t-1}_{E}}\right) - \tfrac{1}{2}(s_E^{t-1}+s_E^{t})\log\left(\frac{e^{t}_{E}}{e^{t-1}_{E}}\right) \tag{21}$$

Når vi nu opdeler udtrykket i $\hat{P}_{KLE,kæde}$ og bidrag hørende til e_E, får vi følgende udtryk, hvor e_E fra samtlige tidsperioder indgår, idet $\tilde{P}^{t-1}_{KLE,kæde}$ skal medtages.

$$\log(\tilde{P}^{t}_{KLE,kæde}) = \log(\hat{P}^{t}_{KLE,kæde}) - \sum_{q=2}^{t} \tfrac{1}{2}(s_E^{q-1}+s_E^{q})\log\left(\frac{e^{q}_{E}}{e^{q-1}_{E}}\right) \tag{22}$$

Dette udtryk er ikke umiddelbart anvendeligt i energi-estimationsligningen, da der indgår en vægtet sum af alle effektivitetsændringerne, men inspireret af løsningen i fastbase-tilfældet kan vi til estimationsbrug sætte $s_E^{t}=s_E^{1995}$, (derved går de mellemste led ud med hinanden), og hvis vi desuden normerer $e_E^{1}=1$, kan det effektivitetskorrigerede Törnqvist-prisindeks approksimeres med (23), hvilket er samme relation som i tilfældet med fastbase (18).

$$\log(\tilde{P}^{t}_{KLE,kæde}) \approx \log(\hat{P}^{t}_{KLE,kæde}) - s_E^{1995}\cdot\log(e_E^{t}) \tag{23}$$

Dermed bliver estimationsligningen og omregningen til parametrene i energieffektivitetsindekset magen til ovenstående tilfælde med et fastbase Törnqvist-prisindeks, dvs. (19) og (20).

Efter estimationen kan vi i modellen vælge at ‘flytte’ energieffektivitetsindekset ‘tilbage’ i Törnqvist-prisindekset, således at vi direkte opskriver det effektivitetskorrigerede Törnqvist-prisindeks, hvor alle de indgående priser er effektivitetskorrigeret hhv. (12) og (13), og den ‘sædvanlige’ energiligning (16). Det skal bemærkes, at det er en lidt grovere approksimation, der foretages i tilfældet med kædeprisindeks fremfor et fastbaseprisindeks, men det vil næppe være betydningsfuldt i modellen.

4.3. I prisindekset indgår *kun* priser, der også indgår i ligningen

Vi ser her på transportdelmodellen for husholdningernes valg mellem benzin, *fCg*, og kollektiv transport, *fCk*, betinget på den samlede udgift, *Cgk*, hvilken bestemmes fra DLU og efterspørgslen efter biler, jf. RHM25102. Der estimeres følgende langsigtssammenhænge

$$\begin{aligned} \log(fCg) &= \log\left(\frac{Cgk}{P_{gk}}\right) + \sigma\log\left(\frac{pcg}{P_{gk}}\right) + \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \\ \log(fCk) &= \log\left(\frac{Cgk}{P_{gk}}\right) + \sigma\log\left(\frac{pck}{P_{gk}}\right) + \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \end{aligned} \tag{24}$$

P_{gk} er et Törnqvist-prisindeks over *pcg* og *pck*. Trendleddene samles til et effektivitetsindeks for henholdsvis benzin, e_g, og kollektiv transport, e_k, som beskrevet i afsnit 3.

Vi ser først på tilfældet med et *fastbase-prisindeks*.

Med effektivitetskorrigering af P_{gk} har vi følgende udtryk, hvor det antages, at effektivitetsindeksene normeres, så $e_g^{95} = e_k^{95} = 1$.

$$\begin{aligned} \log(\tilde{P}^t_{gk,95}) &= \sum\nolimits_{i=g,k} \tfrac{1}{2}(s_i^{95} + s_i^t)\log\left(\frac{p_i^t}{p_i^{95}}\right) - \sum\nolimits_{i=g,k} \tfrac{1}{2}(s_i^{95} + s_i^t)\log(e_i^t) \\ &= \log(P^t_{gk,95}) - \sum\nolimits_{i=g,k} \tfrac{1}{2}(s_i^{95} + s_i^t)\log(e_i^t) \end{aligned} \tag{25}$$

Her husker man så pludseligt, at i fordelingssystemer skal effektivitetsindeks underlægges parameterrestriktioner, således at effektivitetsindeksene kun er faktorforvridende.[4] I MAR18499 er det vist, at et passende krav er

$$\prod\nolimits_i (e_i)^{S_i} = 1 \quad \text{dvs. fx} \quad s_g^{95}\cdot\log(e_g^t) + s_k^{95}\cdot\log(e_k^t) = 0 \tag{26}$$

Så hvis vi ligesom med energiligningen i forrige afsnit lader $s_i^t = s_i^{95}$, ser vi, at givet effektivitetsindeksene pålægges restriktionen i (26), bliver det effektivitets-korrigerede Törnqvist-prisindeks approksimativt lig med selve Törnqvist-prisindekset.

$$\log(\tilde{P}^t_{gk,95}) \approx \log(P^t_{gk,95}) \tag{27}$$

[4]Der er ikke et overordnet effektivitetsindeks i aggregatet af *fCg* og *fCk*, ellers var det, der skulle fordeles på de to komponenter.

Dermed får vi følgende to estimationsligninger magen til (24).

$$\begin{aligned} \log(fCg) &= \log\left(\frac{Cgk}{P_{gk}}\right) + \sigma\log\left(\frac{pcg}{P_{gk}}\right) + \alpha_0 - (1+\sigma)\log(e_g) \\ \log(fCk) &= \log\left(\frac{Cgk}{P_{gk}}\right) + \sigma\log\left(\frac{pck}{P_{gk}}\right) + \beta_0 - (1+\sigma)\log(e_k) \end{aligned} \tag{28}$$

Hvis effektivitetsindeksene formuleres som $\log(e_i) = \omega_{1,i}t + \frac{1}{2}\omega_{2,i}t^2$, $i{=}g,k$, skal de pålægges følgende restriktioner, svarende til (26).

$$\frac{\omega_{1,g}}{\omega_{1,k}} = \frac{\omega_{2,g}}{\omega_{2,k}} = -\frac{s_k^{95}}{s_g^{95}} \tag{29}$$

Tilsvarende argumenter gør sig gældende i tilfældet med et *kædeprisindeks*, således at vi i begge tilfælde blot beregner Törnqvist-prisindekset ud fra de underliggende (ikke-effektivitetskorrigerede) priser og anvender dette som et eksogent prisindeks i de sædvanlige estimationsligninger.

Som et kuriosum kan det nævnes, at regnes der i gennem *uden* restriktionen (26) på effektivitetsindeksene, fremkommer samme restriktion formuleret med de direkte estimerede parametre som en betingelse. Følges idéen fra afsnittet om energiligningen med at sætte $s_i^t = s_i^{95}$ i ligning (25) for Törnqvist-prisindekset, fås nedenstående estimationsligning (her kun opskrevet for *fCg*), hvor det sidste lighedstegn fremkommer ved at erindre, at $s_g + s_k = 1$.

$$\begin{aligned} \log(fCg) &= \log\left(\frac{Cgk}{\tilde{P}_{gk}}\right) + \sigma\log\left(\frac{pcg}{\tilde{P}_{gk}}\right) + \alpha_0 - (1+\sigma)\log(e_g) \\ &= \log\left(\frac{Cgk}{P_{gk}}\right) + \sigma\log\left(\frac{pcg}{P_{gk}}\right) + \alpha_0 \\ &\quad - (1+\sigma)\log(e_g) + (1+\sigma)s_g^{95}\log(e_g) + (1+\sigma)s_k^{95}\log(e_k) \\ &= \log\left(\frac{Cgk}{P_{gk}}\right) + \sigma\log\left(\frac{pcg}{P_{gk}}\right) + \alpha_0 \\ &\quad - s_k^{95}(1+\sigma)[\log(e_g) - \log(e_k)] \end{aligned} \tag{30}$$

Det ses, at forholdet mellem effektivitetsindeksene, $[\log(e_k) - \log(e_g)]$, nu vil indgå i begge ligninger. I tilfældet med lineære trende kan opskrives nedenstående sammenhænge mellem parametrene i effektivitetsindeksene (ω_g og ω_k) og de estimerede parametre (α_1 og β_1). Tilsvarende ligningssystem kan selvfølgelig opskrives i tilfældet med en kvadratisk trend.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -s_k^{95}(1+\sigma)(\omega_g - \omega_k) \\ \beta_1 &= (1-s_k^{95})(1+\sigma)(\omega_g - \omega_k) \end{aligned} \tag{31}$$

Dette er to ligninger med to ubekendte (ω_g og ω_k), hvor parametrene ikke umiddelbart kan identificeres.

Hvis man prøver at løse ligningssystemet (fx ved at dividere ligningerne med hinanden), forsvinder effektivitetsindeksparametrene op i den blå luft, mens der til gengæld fremkommer nedenstående restriktion på effektivitetsindeksene, der er ækvivalent med den, vi *ikke* pålagde effektivitetsindeksene.

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = -\frac{s_k^{95}}{s_g^{95}} \tag{32}$$

5. Afrunding

Vi har i papiret set på muligheden for at effektivitetskorrigere et Törnqvist-prisindeks med udgangpunkt i to konkrete tilfælde, henholdsvis energiligningerne, *fVe*, og transportdelmodellen for *fCg* og *fCk*.

For energiligningerne udledte vi en simpel approksimation, således at Törnqvist-prisindekset kunne være eksogent i estimationen, energiligningen kunne estimeres lineært, hvorefter der kunne omregnes til parametrene i energieffektivitetsindekset. Det gav anledning til samme estimationsligning med et fastbase- og et kædeprisindeks.

For transportdelmodellen viste vi det generelle resultat, at i et fordelingssystem skal Törnqvist-prisindekset *ikke* effektivitetskorrigeres, *hvis* de underliggende effektivitetsindeks er pålagt en restriktion, der sikrer, at de kun er faktorforvridende.

Litteratur

- W.P. Diewert (1987): “Index numbers”, afsnit i The New Palgrave – A Dictionary of Economics, Volume 2, New-York, Stockton Press, 1987.
- Lars Otto (april 1998): “Kort om prisindeks”, undervisningsnote, Den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Institut for Økonomi, Skov og Landskab
- ADAM-bogen
- EMMA-bogen
- Martin Rasmussen (1999): “Mængde- og effektivitetsindeks i nestede produktionsfunktioner”, MAR18499

- Line Brinch-Nielsen (2001): "Forsøg med Törnqvist-prisindeks som alternativ prisdeflator i energiligningerne", LNI18d01
- Rasmus Holm Madsen, Anne Bender, Dorte Grinderslev (2002): "Ny transportmodel - valg mellem benzin og kollektiv transport", RHM25102

Bilag A. Lidt om CES-efterspørgselsfunktioner

Her opsummeres kort, hvordan efterspørgselsfunktionerne ser ud i tilfældet med en CES-funktion.

CES (produktions-)funktionen med to faktorer er givet ved (33), hvor σ er substitutionselasticiteten, og kun to af de tre CES-parametre (ε, δ_1, δ_2) kan estimeres frit. Parametrene skal dog alle være positive. Alt efter problemstillingen kan med fordel vælges forskellige restriktioner, fx ε=1 eller δ_1+δ_2=1, eller der kan vælges andre (ækvivalente) opskrivninger.

$$Y = \varepsilon \cdot \left[\delta_1 \cdot X_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \delta_2 \cdot X_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{33}$$

Dette giver anledning til følgende (langsigtede) efterspørgselsfunktioner:

$$X_1^* = \frac{Y}{\varepsilon} \cdot \delta_1^{\sigma} \cdot \left(\frac{P_1}{P_{CES}} \right)^{-\sigma} \quad \text{og} \quad X_2^* = \frac{Y}{\varepsilon} \cdot \delta_2^{\sigma} \cdot \left(\frac{P_2}{P_{CES}} \right)^{-\sigma} \tag{34}$$

Hvor relativprisen, P_{CES}, er CES-prisindekset givet ved (35), hvor vi bemærker, at det afhænger af parametrene.

$$P_{CES} = \left[\delta_1^{\sigma} \cdot P_1^{1-\sigma} + \delta_2^{\sigma} \cdot P_2^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{35}$$

Hvis vi i stedet vælger at erstatte relativprisen med en vilkårlig anden pris, der kan antages eksogen i estimationen, bliver efterspørgselsligningerne simple log-lineære sammenhænge, der kan estimeres med OLS. Det, vi har set et par eksempler på, er at erstatte relativprisen med et Törnqvist-prisindeks, jf. (36).

$$\log(X_i^*) = \kappa + \log(Y) - \sigma \cdot \log\left(\frac{P_i}{P_{Törn}} \right) \tag{36}$$

Hvis CES-prisindekset anvendes, substitutieres det ofte ind i selve efterspørgselsligningerne, der dermed bliver yderst ikke-lineære, jf. formuleringen i ADAM's ligninger for erhvervenes efterspørgsel efter maskinkapital og arbejdskraft, (se ADAM-bogen s. 117).

En anden mulighed for at “slippe” for CES-prisindekset er at betragte faktorforholdet (37), der ligeledes kan estimeres log-lineært, (bemærk, at dette ikke giver direkte ligninger for de langsigtede *niveauer*).

$$\frac{X_1^*}{X_2^*} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\sigma} \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-\sigma} = \delta \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-\sigma} \tag{37}$$