

# The demand for production factors in Denmark<sup>1</sup>

Thomas Thomsen<sup>2</sup>

August, 1999

## Abstract

This paper shows how to derive short-run factor demands from any long-run factor demand system (or long-run cost function), by means of so-called shadow prices. Also, the paper shows how to incorporate technical progress into any cost function or factor demand system in an easy and easily interpretable way, but without loss of flexibility. In addition, the paper analyzes the long-run CES, generalized Leontief (GL), and translog cost functions in much detail, showing when and how the two last-mentioned are problematic. The *short-run* versions of the GL and translog are shown to contain even more problems than their long-run counterparts. The paper concludes with an empirical section, estimating the demand for capital, labour, energy and materials on aggregate Danish data 1957-89, using a dynamic GL factor demand system, and testing a large number of hypotheses. Besides this, an easy approximation formula linking short- and long-run factor demand is given, and the role of expectations is dealt with in section 6, showing that the interest rate can not be expected to have a large effect on the adjustment of the capital stock (machines). The paper uses only the most necessary mathematical formalization, and should therefore be relatively easy to understand, at least compared to the standard literature on these topics.

*JEL classification:* D21, D24, D45, E23.

*Key words:* Dynamic factor demand; Cost functions; Shadow/virtual prices; Flexible functional forms; Factor augmenting efficiency indexes;

---

<sup>1</sup>Danish title: "Efterspørgslen efter produktionsfaktorer i Danmark." The paper is in Danish.

<sup>2</sup>Macroeconomic Model Unit, Statistics Denmark, Sejrøgade 11, DK-2100 Copenhagen, Denmark. Phone (+45) 39 17 32 02, Fax (+45) 39 17 39 99, E-mail: tt@ens.dk.

## Indhold

Forord til denne udgave samt resumé . . . . .	5
Symboler . . . . .	8
1. Indledning . . . . .	10
2. Problemstillingen . . . . .	12
3. Produktions- og omkostningsfunktioner . . . . .	15
3.1. Tre populære funktionsformer i to-faktortilfældet . . . . .	18
3.2. Funktioner med mere end to produktionsfaktorer . . . . .	32
4. Tekniske fremskridt . . . . .	47
4.1. Den praktiske formulering af effektivitetstrendene . . . . .	50
4.2. Dekomponering af trendbidrag og fremskrivning af trends . . . . .	52
5. Den dynamiske tilpasning mod langsigtsligevægt . . . . .	55
5.1. Skyggepriser/virtuelle priser . . . . .	56
5.2. En approksimation af kortsigtseffekterne . . . . .	61
5.3. Sammenligning af kortsigtsomkostningsfunktioner . . . . .	64
5.4. GLO-kortsigtsligninger i firefaktortilfældet . . . . .	70
6. Forventningsdannelse og tilpasningsomkostninger . . . . .	73
6.1. Den teoretiske model . . . . .	74
6.2. Diskussion . . . . .	80
7. Estimationer . . . . .	84
7.1. En illustrativ estimation . . . . .	84
7.2. Tests af forskellige hypoteser . . . . .	108
7.3. Udbygningsmuligheder . . . . .	117
8. Konklusion . . . . .	120
Litteratur . . . . .	121
Bilag A. Flere isokvanter (forskellige omkostningsandele) . . . . .	125
Bilag B. Virksomhedernes kortsigtede marginalomkostninger . . . . .	128
Bilag C. Oversigt over datakonstruktion og aggregering . . . . .	129
Bilag D. Rekursiv estimation – de tyve parametre . . . . .	131
Bilag E. Dokumentation af testtræer . . . . .	136

## Forord til denne udgave samt resumé

Dette working-paper er et optryk af forfatterens hovedopgave fra juni 1994. Motivationen for genoptrykket er, at den med fordel kan læses i sammenhæng med med working-papers 1998:1 og 1998:2 ("Faktorblokkens udviklingshistorie" hhv. "Links between short- and long-run factor demand"), men at den som hovedopgave kun har været tilgængelig via biblioteket på Økonomisk Institut på Københavns Universitet. Dette er der hermed rådet bod på.

Som nævnt i bilaget i working-paper 1998:1, vil hovedopgaven nok være god at læse, hvis man overhovedet intet véd om faktorefterspørgsel og omkostningsfunktioner, da der i hovedopgaven er udvist forsøg på at fremstille tingene så pædagogisk som muligt. Imidlertid kan man strengt taget sige, at der ikke står meget i hovedopgaven, som ikke kan læses mere præcist og mere generaliseret i working-paper 1998:2 (som også findes i en tilsvarende, forbedret udgave; se Thomsen (2000) i litteraturlisten side 121), men til gengæld er nærværende working-paper nok en del lettere at læse end 1998:2 (eller Thomsen (2000)).

Nyt i forhold hvad der kan findes i working paper 1998:1 og 1998:2 er isokvant-diagrammer for forskellige omkostningsfunktioner, hvor man præcist kan se, hvor og hvordan translog- og GL-funktionerne (og kortsigtsudgaverne af samme) har deres svagheder (figur 3.9, 3.10, 5.4, 5.6). Man kan også se, hvordan komplementaritet ser ud i nogle 3D-figurer (figur 3.16 side 40), og der er en grafisk illustration af skyggepris-ideen (figur 5.1-5.3). Desuden er der i afsnit 3.2.2 givet en pædagogisk gennemgang af GL-funktionen, og hvorledes der pålægges separabilitet på denne. Kapitel 6 indeholder en relativt pædagogisk gennemgang af forventningsdannelse og tilpasningsomkostninger, og det vises bl.a., at renten ikke må formodes at betyde det store for kapitalapparatets tilpasningshastighed. Kapitel 7 har selvstændig interesse, da der her er vist en række estimationer med GL-systemet. Der testes for en lang række ting, herunder separabilitet og trends. Det skal også nævnes, at forfatteren på en række punkter er blevet klogere siden 1994, så derfor har jeg i det følgende indsat en række advarsler af formen [*Se her! <kommentar>*]. - *Thomas Thomsen, august 1999*], hvori der forklares og henvises til senere skrifter.<sup>3</sup>

Med hensyn til en decideret "læseplan" for læsere, som vil sætte sig ind i faktorefterspørgsel fra bunden af, vil jeg henvise til bilaget i working paper 1998:1, hvori en sådan er givet. Min eneste kommentar til dette er – som nævnt ovenfor – at det vil være bedre at læse Thomsen (2000) end working paper 1998:2, da førstnævnte er en forbedret udgave af sidstnævnte (dette gælder særligt indledningen, som er helt omskrevet).

---

<sup>3</sup>Det skal også for en ordens skyld nævnes, at formel (3.4), (3.5), (3.15) og (3.17) er rettet i forhold til hovedopgaven (som indeholdt en fejl i disse).

**Resumé af Efterspørgslen efter produktionsfaktorer i Danmark, Thomas Thomsen, juni 1994.**

I denne opgave opstilles et modelapparat, som gør det muligt at modellere faktorefterspørgsel på en relativt enkel måde. Disse faktorefterspørgselsfunktioner er karakteriseret ved at være teoretisk konsistente også på kort sigt, og det egentligt nye er, at sådanne konsistente faktorefterspørgselsfunktioner er mere enkle at udlede og have med at gøre, end man måske umiddelbart skulle tro. I disse funktioner indbygges tekniske fremskridt desuden på en ny måde, hvilket letter fortolkningen af de tekniske fremskridt væsentligt.

I *kapitel 2* beskrives "producentens problem" ganske kort, og det pointeres, hvilke forsimplinger der foretages for at holde modellen så simpel som muligt. Således opereres der med konstant skalaafkast, og faktorpriserne og produktionen (og outputprisen) forudsættes eksogent givne, således at producentens problem reduceres til at minimere omkostningerne. I dette afsnit skelnes desuden mellem såkaldte anden- og tredjegerationsmodeller, idet andengenerationsmodeller adskiller sig fra tredjegerationsmodeller ved, at man ikke "er på produktionsfunktionen" på kort sigt.

Herefter undersøges i *kapitel 3* tre populære funktionsformer; CES, Generaliseret Leontief (GLO) og translog. Dette foregår helt teoretisk med kun to produktionsfaktorer, og det vises, at GLO-funktionen er at foretrække frem for translogfunktionen, hvis der er beskeden faktorsubstitution, mens det omvendte gør sig gældende, hvis der er kraftig substitution. Derudover foreslås en omparametrisering af CES-funktionen, som skulle lette arbejdet for en iterativ estimationsalgoritme i tilfælde med beskeden faktorsubstitution. Dualiteten mellem produktions- og omkostningsfunktioner illustreres vha. CES-produktionsfunktionen, som har en "self dual" omkostningsfunktion.

I flerfaktortilfældet vises det, hvorfor CES-funktionen ikke er fleksibel i en nærmere defineret forstand, og det vises grafisk, hvordan komplementaritet mellem to produktionsfaktorer tager sig ud. Til sidst i kapitlet gennemgås GLO-funktionen mere detaljeret i firefaktortilfældet med henblik på at kunne bruge denne funktionsform i det empiriske kapitel 7. Det vises herunder, hvordan forskellige former for separabilitet lægges (nestningsstrukturer) på GLO-funktionen.

I *kapitel 4* introduceres tekniske fremskridt (approksimeret vha. en tidstrend). Det vises, hvorledes disembodied faktorudvidende tekniske fremskridt uden videre lader sig bygge ind i enhver produktions- eller omkostningsfunktion. Denne fremgangsmåde giver en række fortolkningsmæssige fordele, og det vises, at formuleringen gør det meget simpelt at dekomponere en estimeret model, dvs. finde ud af, hvor meget af udviklingen i produktionsfaktorerne, som kan tilskrives produktionen, faktorpriserne hhv. de tekniske fremskridt.

Opgavens centrale kapitel er *kapitel 5*, i hvilket det vises, at man kan "betinge" på én eller flere af produktionsfaktorerne uden at skulle løse et nyt minimeringsproblem. Dette resultat stammer fra forbrugsteorien, idet man kan vise, at hvis en forbruger fx er rationeret i valget af én af sine forbrugsvarer, kan effekterne på købet af de andre varer findes, ved kunstigt at hæve prisen på den rationerede vare, indtil forbrugeren lige netop efterspørger så meget af den, som han/hun rent faktisk kan få. Sådanne kunstige priser kaldes skyggepriser eller "virtuelle" priser, og resultatet er direkte anvendeligt i faktorefterspørgselssammenhæng. Det vises, hvordan kortsigtede GLO-faktorefterspørgsler udledt på denne måde kommer til at se ud. I kapitlet udledes også nogle enkle sammenhænge, hvormed man kan approksimere de fleksible faktorerers afvigelse fra deres optimale/langsigtede niveauer som følge af, at de(n) træge produktionsfaktor(er) ikke har tilpasset sig på kort sigt.

Den nævnte skyggepris-tilgang kontrasteres med den traditionelle måde at lave kortsigtsfaktorefterspørgsler på i GLO- og translogtilfældet. Det vises vha. figurer, at de traditionelle GLO- og translog-kortsigtsomkostningsfunktioner ("restricted cost functions") giver en alvorlig asymmetri i de underliggende langsigtsfaktorefterspørgsler, og i tilfælde med beskeden faktorsubstitution advares der imod at arbejde med disse.

Forventningsdannelsen og tilpasningsomkostninger berøres ganske kort i *kapitel 6*, hvor der bl.a. argumenteres for, at renten formentlig ikke har den store betydningen for den optimale tilpasningshastighed for de(n) træge produktionsfaktor(er). I kapitlet ses det, at en rent partiel tilpasningsmodel er konsistent med kvadratiske tilpasningsomkostninger og statiske forventninger.

I *kapitel 7* foretages først en enkelt estimation på et aggregeret ADAM-erhverv på perioden 1957-89, med det formål at illustrere, hvad teorien i de foregående kapitler kan bruges til. Der opereres med fire produktionsfaktorer (kapital, arbejdskraft, energi og materialer), idet de to førstnævnte tillades at være træge på kort sigt. Estimationen ser fornuftig ud, hvad priselasticiteter og tilpasningshastigheder angår, mens der er problemer med at fortolke udviklingen i kapitalapparatets effektivitet. Der er desuden problemer med autokorrelation i residualerne, uden at det dog er hårrejsende, det relativt beskedne antal tilpasningsparametre taget i betragtning.

Det vises, at det er relativt let at fortolke multiplikatorerne, og desuden vises det, at det vha. dekomponeringer er muligt at give ret detaljerede forklaringer på udviklingen i de langsigtede faktorniveauer. En rekursiv estimation indikerer, at der specielt i årene 1972-74, 1986 og 1989 er problemer med parameterstabiliteten.

I den anden halvdel af *kapitel 7* testes en række hypoteser, hvad kortsigtdynamik, nestningsstrukturer og trends angår. Det vises her, at både kapitalapparatet og arbejdskraften er træge på kort sigt, og hvad nestningsstruktur angår, vises det bl.a., at en såkaldt  $((KE)LM)$ -struktur er acceptabel, mens en  $((KL)EM)$ -nestnings-

struktur er i modstrid med data. Hvad trends angår, vises det, at det ikke er muligt at undvære (effektivitets)trends i hverken kapitalapparatet eller arbejdskraften, mens det lidt bedre lader sig gøre med de to andre produktionsfaktorer. Specielt Hicks-neutralitet, men også Harrod- og Solowneutralitet må afvises på høje testniveauer.

Til sidst i kapitel 7 skitseres nogle muligheder for det videre arbejde med faktor-efterspørgselssystemet.

## Symboler

For al lette læsningen, er der et vist system i anvendelsen af symboler. Systemet er, at alle variabler er med *almindelige og kursiverede* bogstaver. Disse variabler skal opfattes som tidsserier; dvs. indeholdende ét tal for hver tidsperiode. Alle parametre er med *græske bogstaver*. Disse parametre er konstante og antager samme værdi i hver tidsperiode. Til sidst er alle funktionsformer med *almindelige ikke-kursiverede* bogstaver. De vigtigste symboler er listet i det følgende:

$x(-1)$	Variablen $x$ lagget én periode (sidste periodes værdi).
$x(1989)$	Variablen $x$ 's værdi i året 1989.
$x_t$	Variablen $x$ 's værdi til tidspunkt $t$ .
$x^*$	Variablen $x$ 's optimale størrelse = størrelsen på langt sigt.
$X_i$	Størrelsen af produktionsfaktor $i$ .
$P_i$	Prisen på $X_i$ .
$Y$	Produktion/afsætning.
$t$	Tiden $t$ er lig årstallet minus 1989.
$C$	Samlede omkostninger.
$VC$	Variable omkostninger = omkostninger til alle fleksible produktionsfaktorer.
$MC$	Marginale omkostninger = $dC/dY$ .
$AC$	Gennemsnitsomkostninger = $C/Y$ .
$K, L, E, M$	Kapital, arbejdskraft, energi og materialer.
$P_K, P_L, P_E, P_M$	Priser på ovenstående.
$e_{ij}$	Langsigts partielle priselasticiteter = $dX_i^*/dP_j \cdot P_j/X_i = d\log(X_i^*)/d\log(P_j)$ .
$Z_i$	Effektivitetsindeks for faktor $i$ i niveau (typisk = 1 i 1989).

$\alpha$ 'er	Parametre, som hører til translogfunktionen.
$\beta$ 'er	Parametre, som hører til GLO-funktionen.
$\kappa, \delta$ og $\sigma$	Parametre, som hører til CES-funktionen.
$\omega$ 'er	Parametre, som beskriver $Z_i$ som funktion af $t$ .
$\lambda$ 'er	Tilpasningsparametre.

$d\log(x)$	Læses som $d(\log(X))$ .
$D(x)$	$= x - x(-1)$ .
$D\log(x)$	$= \log(x) - \log(x(-1)) = \log(x/x(-1)) \approx x/x(-1) - 1$ .
$R(x)$	Relativ ændring: $R(x) = x/x(-1) - 1$ .

I det følgende vil vi ofte operere med fire produktionsfaktorer, idet vi i kapitel 7 vil estimere en model med dette antal faktorer. De fire faktorer kaldes i de teoretiske afsnit  $X_1, X_2, X_3$  og  $X_4$ , svarende til  $K, L, E$  og  $M$ . Til sidst skal det nævnes, at følgende matematiske sammenhæng bruges nogle gange:

$$\frac{d\log(x)}{d\log(y)} = \frac{dx/x}{dy/y} = \frac{y}{x} \frac{dx}{dy} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \frac{d\log(x)}{d\log(y)}$$

## 1. Indledning

Modellering af udbudssiden i den danske økonomi er et emne, som påkalder sig stor interesse. Det er der mange årsager til, og helt naturligt er man selvfølgelig interesseret i at vide, hvor følsomt virksomhedernes forbrug af produktionsfaktorer er mht. ændrede faktorpriser. Således vil man måske gerne vide, hvorledes ændrede afskrivningsregler eller den tyske rente påvirker investeringsniveauet. Og man vil måske gerne vide, om stigende lønninger kun er problematiske i forhold til konkurrenceevnen, eller om de i sig selv giver mindre beskæftigelse, fordi virksomhederne erstatter noget af arbejdskraften ved at investere i arbejdskraftbesparende teknologi. Hertil kommer, at miljøafgifter er et meget varmt emne, og det vil derfor være interessant at kunne analysere, hvordan energiafgifter påvirker investeringsomfanget og beskæftigelsen, og hvor store energiafgifterne skal være, for at nå en given reduktion i virksomhedernes energiforbrug.

I det hele taget er strukturelle forhold "oppe i tiden", hvilket nok ikke mindst skal ses i lyset af den efterhånden manglende tiltro til, at den keynesianske konjunkturregulerende politik kan løse (hele) arbejdsløshedsproblemet. En anden ting er så, at der igennem de sidste ca. tyve år er sket overordentligt meget på det teoretiske område, hvad produktionsfunktioner angår. I dag er der næsten uanede muligheder for at vælge mellem forskellige funktionsformer, hvilket sikkert ikke mindst har at gøre med, at det med nutidens computerteknologi er muligt at estimere selv meget komplicerede systemer relativt smertefrit på en almindelig pc-er.

I det følgende vil vi se på nogle forskellige populære produktionsfunktioner, og denne teoretiske analyse fører til, at én af disse, den såkaldte Generaliserede Leontief-funktion (GLO), vælges som udgangspunkt for en model for efterspørgslen efter produktionsfaktorer i Danmark, dvs. i det konkrete tilfælde efterspørgslen efter kapital, arbejdskraft, energi og materialer. Denne model bliver estimeret i det empiriske kapitel 7, idet virksomhedernes produktion og faktorpriser antages givne på forhånd "udefra", således at virksomhederne blot vælger den sammensætning af ressourceforbruget, som minimerer de samlede omkostninger. Dette minimeringsproblem kompliceres af, at nogle af produktionsfaktorerne antages træge/ufleksible på kort sigt, og der angives en nem og konsistent måde at løse dette problem på.

Opgaven kan godt læses på den måde, at tingene er forsøgt gjort så enkle som muligt, alene af den grund, at meget generelle og komplicerede systemer har en tendens til at blive så indviklede, at det dels kan være vanskeligt at fortolke resultaterne og dels kan være vanskeligt at gardere sig imod deciderede programmeringsfejl. Om der er blevet forenklet for meget, kan man naturligvis altid diskutere, men hensigten har i alt fald været at forsøge at simplificere dér, hvor det måtte formodes at betyde mindst muligt.



I opgaven opstilles et faktorefterspørgselssystem, som er enkelt nok til at være anvendeligt i det empiriske arbejde, men som på samme tid er generelt nok til at kunne belyse interessante problemstillinger. Da de tal, der estimeres på er ADAM-tal, kan man godt opfatte det empiriske kapitel (kapitel 7) som en skitse til, hvordan et faktorefterspørgselssystem kunne se ud i ADAM. Men det skal dog understreges, at det kun *er* en skitse, og strengt taget er estimationerne i kapitel 7 kun illustrative, idet opgaven ikke er tænkt som en decideret empirisk/økonometrisk opgave, men snarere som et forsøg på at løse en række tekniske vanskeligheder på den mest hensigtsmæssige og gennemskuelige måde.

Det er mit håb, at dette system kan finde anvendelse som et arbejdsredskab, som på den ene side er fleksibelt nok til at kunne levere interessante resultater, men på den anden side ikke er så kompliceret, at de mere tekniske problemstillinger tager overhånd. For selv om matematikken i det at modellere produktionsfunktioner kan være udfordrende i sig selv, opfatter jeg den kun som et redskab, som gør det muligt at se strukturer i tal, som det måske umiddelbart er vanskeligt at se sammenhæng i. Det kan man måske undre sig over, at jeg siger – al den stund de følgende sider er fyldt med matematiske ligninger – men hensigten med opgaven er rent faktisk også at forsøge at bringe et emne, som i litteraturen ofte fremstilles i et meget vanskeligt og teknisk sprog, så meget ned på jorden som muligt. Og dette er også begrundelsen for, at der i det følgende er så mange figurer, som der er.

For meget kompetente – men samtidig nogenlunde letlæste – indgange til produktions- og omkostningsfunktioner henvises til Lau's og Jorgensons artikler i tredje bind af *Handbook of Econometrics* (1986). Se evt. også bemærkningerne til litteraturlisten, side 121.

## 2. Problemstillingen

### Profitmaksimering eller omkostningsminimering?

Da vi i det følgende vil forsøge at beskrive virksomhedernes adfærd, er det naturligvis påkrævet at vide, hvad deres målsætning eller motiver er. Almindeligvis siger man blot, at de "profitmaksimerer" – hvilket givetvis i det store og hele er en rigtig beskrivelse – men når vi taler om faktorefterspørgsel, som den vil blive modelleret i denne opgave, vil vi i stedet tage udgangspunkt i, at de omkostningsminimerer. Det betyder ikke, at vi ikke antager, at de profitmaksimerer, men det betyder, at vi kun fokuserer på en del af profitmaksimeringsproblemet; nemlig minimering af *omkostningerne*. Som det ofte siges, gælder det, at "profitmaksimering forudsætter omkostningsminimering", og man kan derfor tænke på det som, at vi i denne opgave udelukkende fokuserer på denne del af producentens problem.

På én eller anden måde får virksomheden fastsat sit produktionsniveau og sin outputpris, og disse størrelser vil vi ikke modellere. Man kunne måske forestille sig, at der var tale om en virksomhed med to afdelinger: en afdeling med økonomer og en afdeling med ingeniører. Økonomerne sidder med hele "producentens problem" og spørger derfor ingeniørerne, hvad de *minimale* omkostninger ved at producere en given mængde varer ville være. Det regner ingeniørerne på, og ved at gentage spørgsmålet, får økonomerne plottet hele omkostningsfunktionen op som funktion af produktionens størrelse. Og ud fra denne information (dvs. givet det løste omkostningsminimeringsproblem) fastsætter økonomerne den profitmaksimerende outputpris og -mængde ud fra en række supplerende informationer om markedsforholdene.

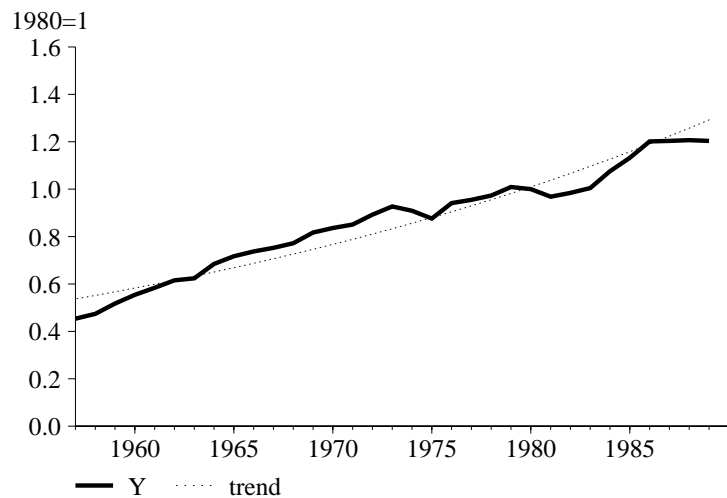
Vi lader altså, som om vi sidder i denne fiktive ingeniøraftdeling og tager produktionen for givet, idet niveauet for denne antages "løst" på forhånd. Hermed ikke sagt, at denne opdeling af problemet er særligt tilfredsstillende, men i hvert fald er det rationalet for udelukkende at bekymre sig om at minimere omkostningerne og se bort fra de vanskelige spørgsmål om, hvorvidt produktionen bestemmes fra efterspørgselsiden, om der er fuldkommen konkurrence eller ej, og hvad efterspørgselskurvens hældning eventuelt måtte være.

### Konstant skalaafkast eller ej?

En af opgavens helt grundlæggende forsimpelnde antagelser er antagelsen om (eller kravet om) *konstant skalaafkast*. Det betyder, at i de systemer, vi kigger på, vil en 1% forøgelse af produktionen på langt sigt altid kræve en 1% forøgelse af hver af produktionsfaktorerne (hvis vi ser bort fra tekniske fremskridt). Det er naturligvis et stort short-cut, men det viser sig, at antagelsen forsimples faktorefterspørgselsfunktionerne betydeligt – og vi taler om funktioner, som allerede med konstant

skalaafkast kan være ret udviklede. Desuden gør antagelsen resultaterne lettere at fortolke, og man slipper for et generende multikollinearitetsproblem mellem skalaafkastet og de tekniske fremskridt, idet produktionen igennem estimationsperioden har udviklet sig ret trendmæssigt, jf. følgende figur.

**Figur 2.1. Produktionen i den private sektor i Danmark**



I figuren er også indtegnet en eksponentiel trend på 2.7%, og selv om væksten i produktionen ikke har været konstant, vil det ikke være let at få identificeret, om eventuelle produktivitetstigninger hidrører fra eksempelvis stigende skalaafkast (stordriftsfordele) eller fra en trend, som fanger udviklingen i de teknologiske fremskridt. Dette er da også en af konklusionerne i en nylig empirisk undersøgelse (From (1994) side 83).

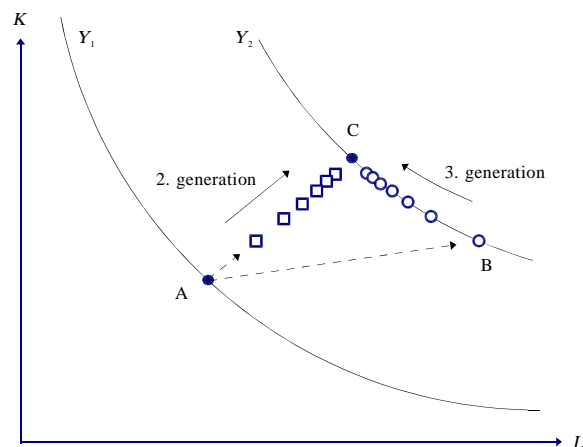
### Den dynamiske tilpasning

Den dynamiske tilpasning vil i denne opgave udelukkende blive af "tredje-generations"-typen. Det betyder, at vi også på kort sigt lægger nogle bånd på faktor anvendelsen, som sikrer, at vi hele tiden "er på produktionsfunktionen". Dette er i modsætning til såkaldte anden-generationsmodeller, hvor vi ganske vist "er på produktionsfunktionen" på langt sigt, men hvor der ikke er lagt bånd på den dynamiske tilpasning, som sikrer dette på kort sigt. Denne sondring mellem "generatio-

ner" har efterhånden bidt sig fast; se evt. From (1994) for en nærmere beskrivelse af de forskellige "generationer" af faktorefterspørgselsmodeller.<sup>4</sup>

Den følgende figur illustrerer forskellen på anden- og tredje-generationsmodeller, idet produktionen fra at være  $Y_1$  i udgangssituationen (A) fordobles til at være  $Y_2$ .

**Figur 2.2** Forskellen på anden- og tredje-generationsmodeller



Figuren er et ganske almindeligt isokvant-diagram, med kapitalapparat ( $K$ ) og arbejdskraft ( $L$ ) ud ad akserne. På langt sigt ender vi i samme punkt, C, men det ses, at tilpasningsprocessen er ret forskellig. I andengenerationsmodellen er der trægheder i både  $K$  og  $L$ , og i modsætning til tredje-generationsmodellen foregår andengenerationstilpasningen ikke hele tiden langs den rette isokvant. I tredje-generationsmodellen er der også træghed i  $K$ , men  $L$  kompenserer på kort sigt for denne træghed, og da der i punktet B er større omkostninger end i punktet C, vil de kort-sigtede omkostninger overstige de langsigtede omkostninger. Dette vil ikke være tilfældet for andengenerationsmodellen, hvor omkostningerne på kort sigt rent faktisk er mindre end på langt sigt, hvilket er kedeligt, da den økonomiske teori peger på det modsatte. Problemet med andengenerationsmodellen er simpelthen, at vi ikke umiddelbart har nogen føling med, hvor langt vi er fra at være "på produktionsfunktionen" på kort sigt og derfor ikke er i stand til at vurdere, om afvigelsen overhovedet er rimelig eller kan fortolkes.

<sup>4</sup>I en første-generationsmodel er vi ikke "på produktionsfunktionen" hverken på kort eller langt sigt, idet produktionsfaktorerne modelleres hver for sig.

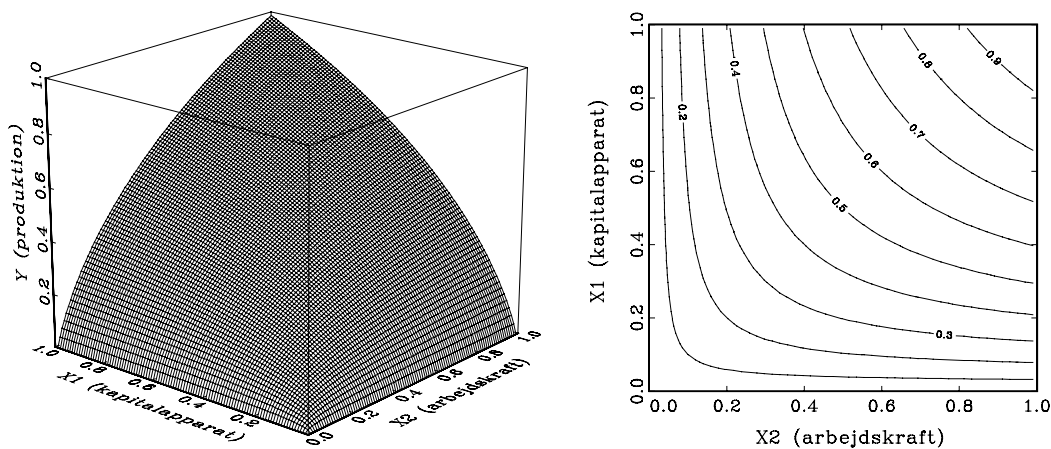
### 3. Produktions- og omkostningsfunktioner

En produktionsfunktion med ét produceret output,  $Y$ , angiver hvor meget  $Y$ , der kommer ud, hvis der bruges så og så meget af produktionsfaktorerne,  $X_i$ . Denne funktionelle sammenhæng skrives som

$$Y = F(X_1, \dots, X_n) . \quad (3.1)$$

Om denne produktionsfunktion antages som regel en række ting, som skal være opfyldt for at vi vil sige, at den opfører sig "pænt". For nemheds skyld antages, at  $F(\cdot)$  er kontinuert og differentiabel, og ser vi bort fra helt banale ting, som fx at produktionen ikke må *aftage*, hvis indsatsen af en eller flere af produktionsfaktorerne forøges, er kravet om pæn opførsel ækvivalent med et krav om, at  $F(\cdot)$  er kvasikonkav. Det betyder, at det ekstra (marginale)  $Y$ , man kan producere ved hjælp af en ekstra indsats af en af produktionsfaktorerne vil være aftagende efterhånden som indsatsen øges, *givet* at alle de andre faktorer holdes konstante. Er dette overholdt, har vi en sædvanlig neoklassisk produktionsfunktion.<sup>5</sup>

**Figur 3.1. En neoklassisk produktionsfunktion med konstant skalaafkast**

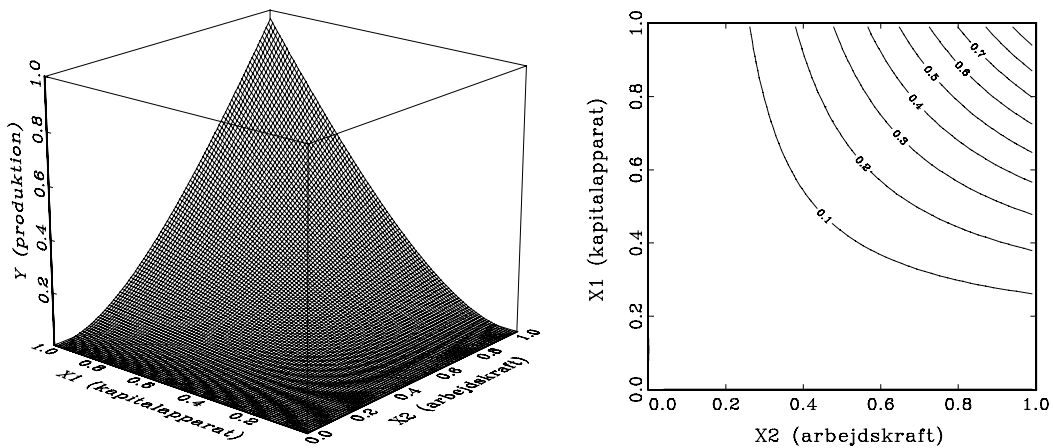


<sup>5</sup>Det er dog ikke det hele. I Heathfield/Wibe (1987) karakteriseres den neoklassiske produktionsfunktion som følger: "The kind of production function most widely used is the so-called 'neoclassical' production function. Neoclassical functions can take a host of forms ... but they all have three fundamental characteristics. First they represent ways in which labour, capital and land can be combined to produce goods. Second, they assume that capital is a separate, independent input directly comparable with labour and land. And third, they focus attention on the production possibilities and decisions within processes, firms or industries. Many of the results which spring from these functions, when applied to the various aspects of economics ... , rely on these implicit assumptions. They are not without their critics." (side ix-x).

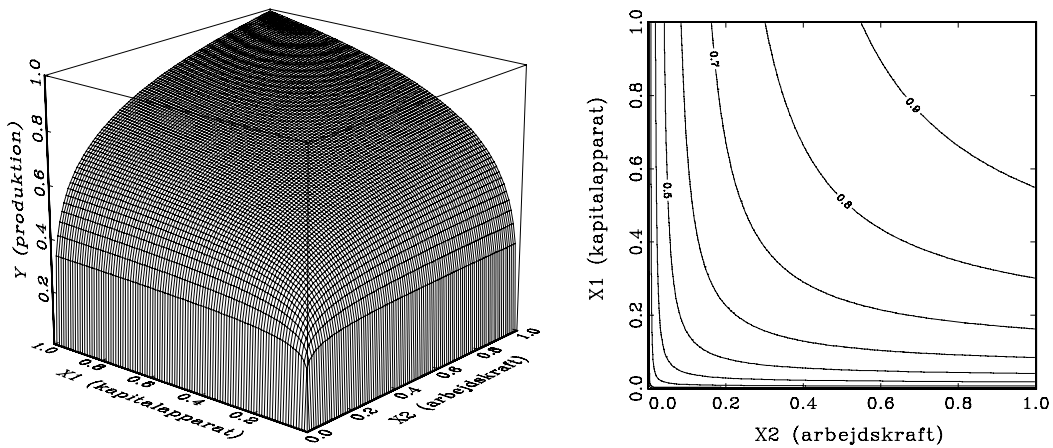
Til venstre er produktionen,  $Y$ , tegnet op som en funktion af to produktionsfaktorer,  $X_1$  og  $X_2$  (kaldet "kapitalapparat" og "arbejdskraft"), og til højre ses de til produktionsfunktionen svarende niveaukurver (isokvanter). Som angivet i figurens overskrift, har den viste produktionsfunktion konstant skalaafkast, svarende til at produktionen fordobles, hvis indsatsen af begge de to faktorer fordobles, eller udtrykt matematisk:  $F(2X_1, 2X_2) = 2F(X_1, X_2)$ . Geometrisk betyder det, at hvis en ret linje ("stråle") udgående fra punktet  $(X_1, X_2, Y) = (0, 0, 0)$  udover punktet  $(0, 0, 0)$  har ét ekstra punkt til fælles med produktionsfunktionen, vil den have uendeligt mange andre punkter til fælles med produktionsfunktionen. Fx ligger alle punkterne på den rette linje, som forbinder punkterne  $(X_1, X_2, Y) = (0, 0, 0)$  og  $(X_1, X_2, Y) = (1, 1, 1)$  på produktionsfunktionen. Hæfter man denne linje fast i punktet  $(0, 0, 0)$  kan man "dreje" linjen rundt på overfladen af produktionsfunktionen, uden på noget tidspunkt at miste berøringen med denne.

At produktionsfunktionen er kvasikonkav vil sige, at de niveaukurver (isokvanter), funktionen giver anledning til, afgrænser konvekse mængder opadtil. At det sidste ikke er ensbetydende med, at produktionsfunktionen selv er konkav, ses tydeligt i de nedenstående figurer, hvor der er stigende hhv. faldende skalaafkast, men hvor isokvanterne ses at have nøjagtigt den samme form som før.

**Figur 3.2. En produktionsfunktion med stigende skalaafkast**



**Figur 3.3. En produktionsfunktion med faldende skalaafkast**



Med stigende eller faldende skalaafkast kan man ikke gentage øvelsen med strålen ud fra punktet  $(0, 0, 0)$ , men man bemærker, at isokvanterne i de viste figurer har nøjagtig det samme udseende – de er blot blevet "renummereret". I alle tre tilfælde er isokvanterne homotetiske – og rent faktisk også homogene – svarende til at ekspansionsvejen er lineær.<sup>6</sup>

Med konstant skalaafkast er al information indeholdt i "enhedsisokvanten", givet som

$$F(X_1, \dots, X_n) = 1. \quad (3.2)$$

Har man vha. denne fundet de omkostningsminimerende faktorniveauer givet faktorpriserne, kan man bagefter multiplicere disse med  $Y$  for at få de rigtige niveauer (dvs. "blæse" systemet op i den rette størrelse).

<sup>6</sup>Ekspansionsvejen beskriver den omkostningsminimerende sammensætning af  $X_1$  og  $X_2$ , når produktionen øges. Ændres *forholdet* mellem faktorerne sig ikke af dette, kaldes produktionsfunktionen homotetisk, og ekspansionsvejen er altså lineær. Et strengere krav er kravet om homogenitet, som forudsætter, at produktionsfunktionen er homogen af en given grad i produktionsfaktorerne. Da vi i det følgende alligevel vil operere med konstant skalaafkast (homogenitet af graden én), vil jeg ikke gå nærmere ind i alt dette.

### 3.1. Tre populære funktionsformer i to-faktortilfældet

I det følgende vil vi se på tre meget populære funktionsformer, alle analyseret i to-faktortilfældet og med konstant skalaafkast. Den første er en egentlig produktionsfunktion, nemlig den såkaldte CES-funktion, mens de sidste er såkaldte omkostningsfunktioner, nemlig GLO- og translog-omkostningsfunktionerne.

#### 3.1.1. CES-produktionsfunktionen

CES-funktionen (Constant Elasticity of Substitution) blev populariseret i Arrow/Chenery/Minhas/Solow (1961), og den kan opfattes som en generalisering af Cobb-Douglas-funktionen. Den har den umiddelbare fordel, at den er såkaldt globalt konsistent (forklaring følger), og den ser ud som følger med to produktionsfaktorer og konstant skalaafkast:<sup>7</sup>

$$Y = \kappa \left[ \delta X_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta) X_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad \kappa > 0, \quad \sigma > 0, \quad 0 < \delta < 1. \quad (3.3)$$

Minimering af de samlede omkostninger,  $C = P_1 X_1 + P_2 X_2$ , giver de optimale/langsigtede faktorefterspørgsler:

$$X_1^* = \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{Y}{\kappa} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\sigma} \left( \frac{1-\delta}{\delta} \right)^{\sigma} + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (3.4)$$

$$X_2^* = (1-\delta)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{Y}{\kappa} \left[ \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{1-\sigma} \left( \frac{\delta}{1-\delta} \right)^{\sigma} + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}. \quad (3.5)$$

Her er  $\sigma$  substitutionselasticiteten,  $-\text{dlog}(X_1/X_2)/\text{dlog}(P_1/P_2)$ , mellem de to faktorer, mens  $\kappa$  og  $\delta$  almindeligvis kaldes for skala- hhv. fordelingsparameteren, og disse sidste kan bl.a. fange eventuelle forskelle i måleenheder. Af (3.4) og (3.5) kan man regne ud, at

$$\frac{X_1^*}{X_2^*} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{-\sigma} \left( \frac{\delta}{1-\delta} \right)^{\sigma} \Leftrightarrow \log \left( \frac{X_1^*}{X_2^*} \right) = -\sigma \log \left( \frac{P_1}{P_2} \right) + \sigma \log \left( \frac{\delta}{1-\delta} \right), \quad (3.6)$$

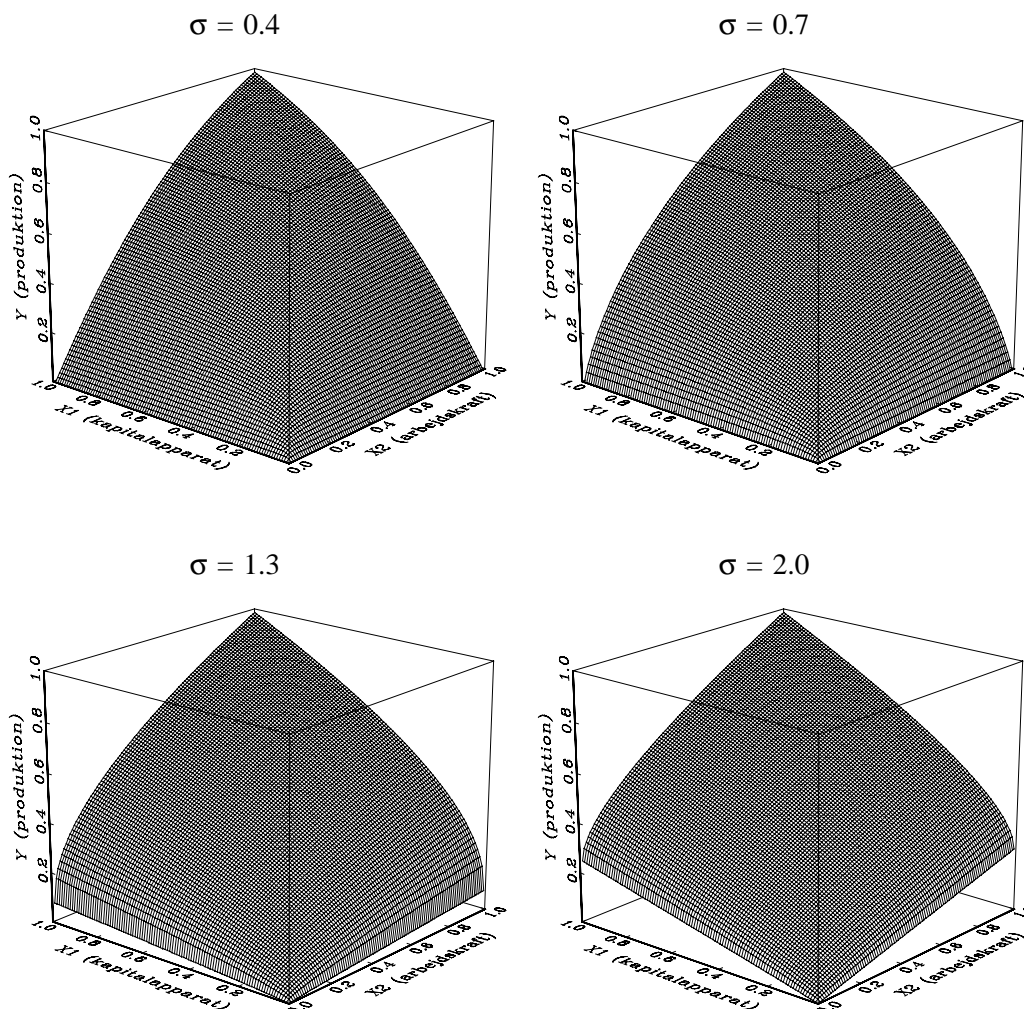
<sup>7</sup>Cobb-Douglas-funktionen fås ved at sætte  $\sigma$  til én i CES-funktionen (som grænseovergang), hvilket giver:

$$Y = \kappa X_1^{\delta} X_2^{1-\delta}$$



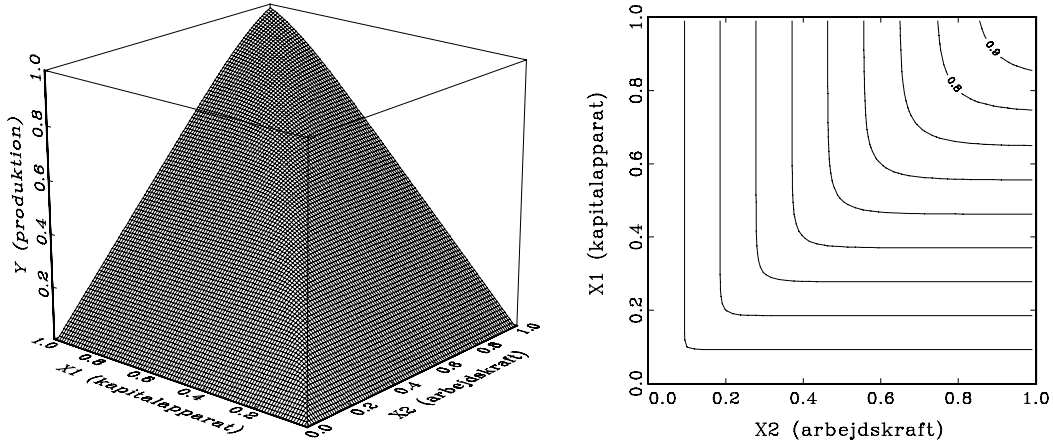
således at en 1% stigning i forholdet mellem de to faktorpriser skubber forholdet mellem de to faktorer  $\sigma\%$  i retning af den faktor, som blev (relativt) billigere. Det andet udtryk i (3.6) bruger man ofte som en nem måde at estimere  $\sigma$  og  $\delta$  på, idet ligningen kan estimeres med almindelig OLS, og fordelen ved en estimationsligning, som er helt lineær i parametrene, skal man ikke kimse af. Parameteren  $\sigma$  er den helt centrale parameter, som siger, hvor meget isokvanterne krummer; dvs. hvor substituérbare faktorerne er.

**Figur 3.4. CES-funktionen for forskellige værdier af  $\sigma$**

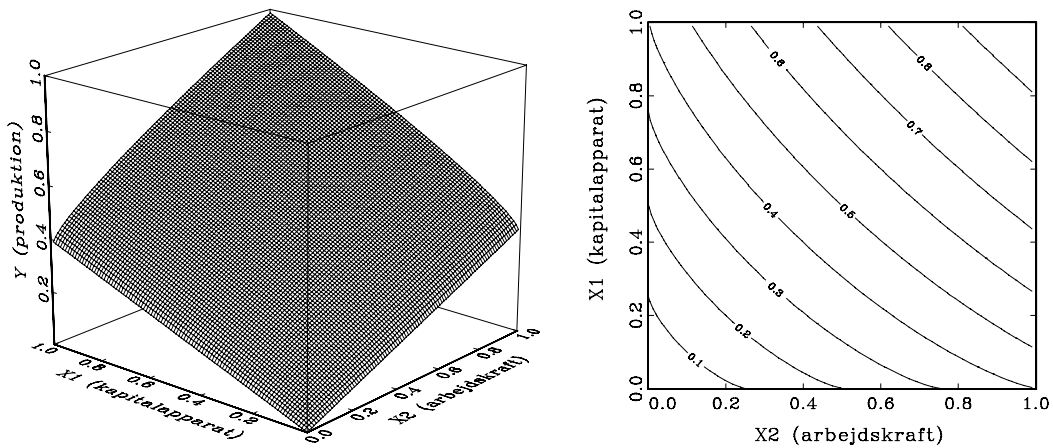


Jo mindre substitutionen er, jo mere "pyramideformet" bliver funktionen, og jo større den er, jo mere flad bliver den. Dette ses endnu tydeligere i det ekstreme tilfælde, hvor  $\sigma$  er sat til 0.1 hhv. 5.0. I disse eksempler er  $\kappa = 1$  og  $\delta = 0.5$ .

**Figur 3.5. CES-funktionen med  $\sigma = 0.1$**

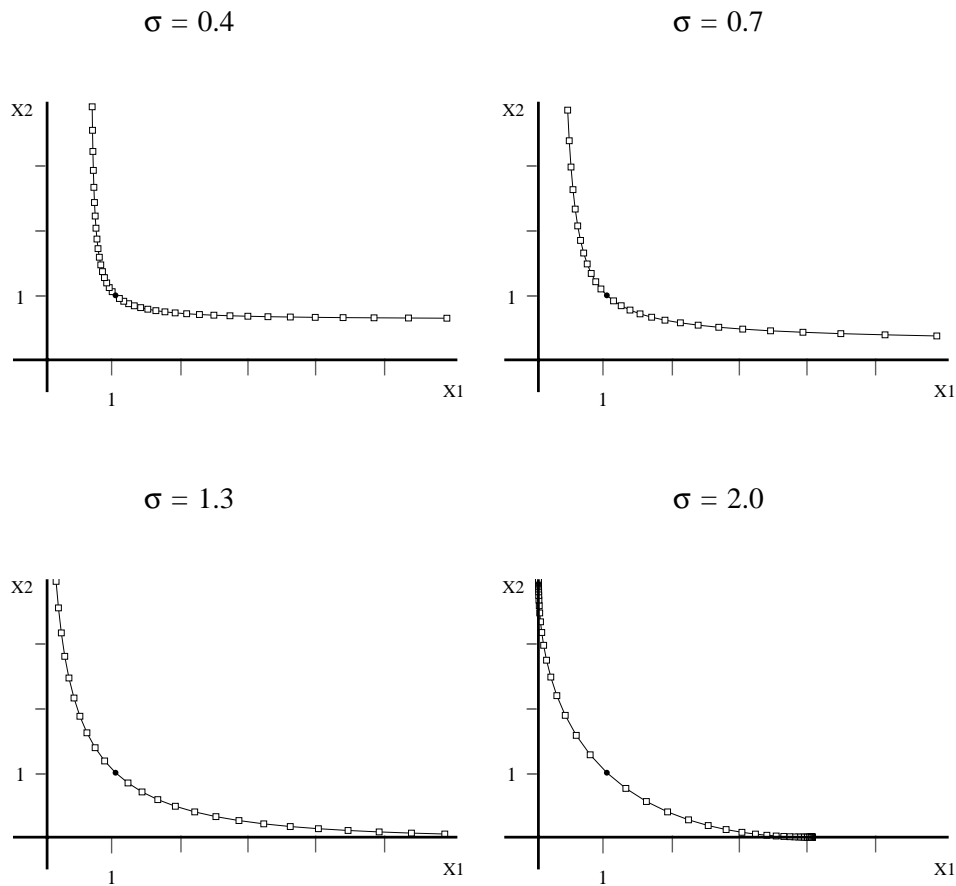


**Figur 3.6. CES-funktionen med  $\sigma = 5.0$**



I det følgende vil vi se på nogle isokvanter for forskellige værdier af  $\sigma$ , idet vi sætter  $\delta = 0.5$ ,  $\kappa = 1$  og  $Y = 1$ . Disse figurer er lavet ved at tage faktorligningerne (3.4) og (3.5) og variere faktorpriserne for givet produktionsniveau, idet man for givet  $Y$  kan opfatte faktorefterspørgslerne som en vektorfunktion af  $P_1$  og  $P_2$ . Ved at variere faktorpriserne tilstrækkeligt meget, får man plottet hele isokvanten op, og konkret ændres  $P_1$  med 30% pr. indtegnet firkant på isokvanten, mens  $P_2$  holdes konstant lig én.

**Figur 3.7. Isokvanter for CES-funktionen**



Vi bemærker flere ting. For det første kan man se, at når substitutionsmulighederne er ringe ( $\sigma = 0.4$ ), har funktionen vandret og lodret asymptote, mens isokvanten ved kraftig substitution ( $\sigma = 2.0$ ) tangerer akserne i et punkt (uden at skære dem, som det nogle gange hævdes). Ved at tage faktorefterspørgslerne (3.4) og (3.5) og lade  $P_1$  hhv.  $P_2$  gå mod uendelig, finder man konkret følgende:

- Når  $\sigma < 1$ , har isokvanterne asymptoter i  $\delta^{\sigma/(1-\sigma)}Y/\kappa$  hhv.  $(1-\delta)^{\sigma/(1-\sigma)}Y/\kappa$ .
- Når  $\sigma = 1$  (Cobb-Douglas), har isokvanterne de to akser som asymptoter.
- Når  $\sigma > 1$ , tangerer isokvanterne akserne i  $\delta^{\sigma/(1-\sigma)}Y/\kappa$  hhv.  $(1-\delta)^{\sigma/(1-\sigma)}Y/\kappa$ .

For  $\sigma = 0.4$  har den indtegnede isokvant således asymptoter 0.63 enheder ude ad akserne, mens asymptoterne for  $\sigma = 0.7$  ligger 0.20 enheder ude. For  $\sigma = 1.3$  tangerer isokvanterne 20.2 enheder ude og 4.0 enheder ude for  $\sigma = 2.0$ . Det sidste ses

i figuren som at firkanterne "går i stå", efterhånden som de nærmer sig tangeringspunktet.

Det økonomiske indhold i dette er, at når der er tale om beskeden substitution ( $\sigma < 1$ ), vil selv en meget voldsom prisforhøjelse på den ene produktionsfaktor ikke kunne klemme denne helt ud af produktionsprocessen, men til gengæld må den anden faktor vokse ud over alle grænser for at kompensere. En anden måde at sige det på er, at med beskeden substitution har hver af faktorerne et "minimumsniveau" (asymptoten), således at hvis man klemmer produktionsfaktoren ned i nærheden af dette niveau, eksploderer forbruget af den anden faktor – og dermed også omkostningerne. I det tilfælde siger man derfor også, at begge produktionsfaktorer er "essentielle", idet ingen af dem vil kunne undværes i produktionsprocessen.<sup>8</sup>

Hvis der er kraftig substitution ( $\sigma > 1$ ), klemmer en meget kraftig prisforhøjelse på en af faktorerne denne (så godt som) helt ud af produktionen, men som følge af den kraftige substitution, eksploderer forbruget af den anden faktor ikke, men går mod et "maksimumsniveau" (tangeringspunktet).

Før vi vil fortsætte med at se på den duale CES-omkostningsfunktion, vil vi et øjeblik opholde os ved et vigtigt problem, som desværre er upræcist beskrevet flere steder i den litteratur, jeg er stødt på. Spørgsmålet er ganske enkelt, hvad der sker, når  $\sigma$  sættes lig nul, svarende til helt fast (prisufølsomt) forhold mellem produktionsfaktorerne (firkantede isokvanter – Leontief). Tager man uden videre (3.4) og (3.5) og sætter  $\sigma = 0$  (eller foretager grænseovergangen i (3.3)), fås at  $X_1 = Y/\kappa$  og  $X_2 = Y/\kappa$ , således at det faste forhold mellem de to faktorer er lig én, uanset hvad  $\delta$  er. Det får nogle forfattere til at tale om 45°-linjer og om nødvendigheden af at skalere sine variabler, så observationerne ligger nogenlunde på en 45°-linje (se fx Heathfield/Wibe (1987) side 96 eller Arrow/Chenery/Minhas/Solow (1961) side 230). Selv om det er rigtigt, at det er, hvad der sker, når  $\sigma$  går mod nul for fastholdt  $\delta$ , er konklusionen ikke præcis, fordi man ved at lade  $\sigma$  gå mod nul *samtidig* med at man lader  $\delta$  gå mod nul eller én kan få et hvilket som helst fast forhold (forskelligt fra 45°-linjen) frem. Det indses lettest ud fra den før viste sammenhæng:

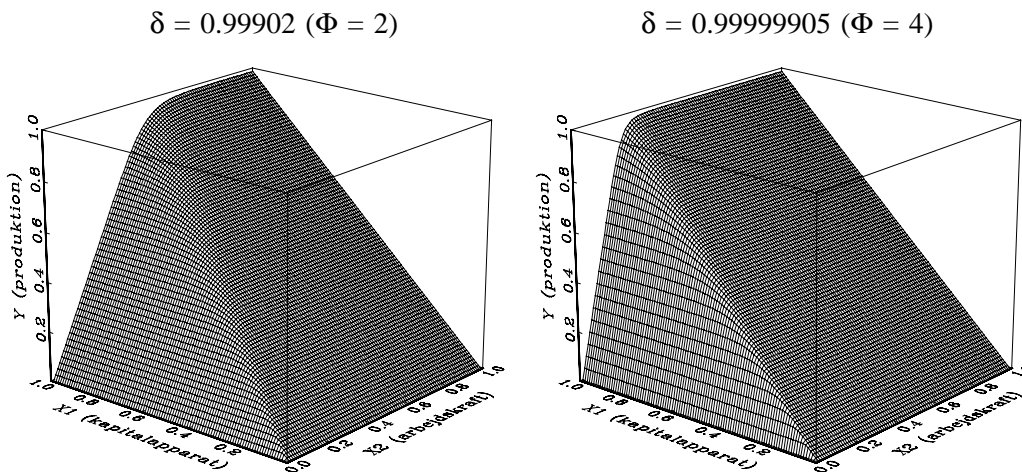
$$\frac{X_1^*}{X_2^*} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{-\sigma} \left( \frac{\delta}{1-\delta} \right)^{\sigma}. \quad (3.7)$$

Lad os nu postulere et fast forhold mellem faktorerne,  $X_1^*/X_2^* = \Phi$ . Det kan vi illustrere med følgende figurer, hvor  $\kappa$  er sat til én, hvor begge faktorpriserne er lig én, hvor  $\Phi$  er lig 2 hhv. 4 og hvor  $\sigma$  er sat til 0.1 – hvorefter de til  $\Phi$ 'erne svarende  $\delta$ 'er findes fra (3.7).

---

<sup>8</sup>Hvis  $\sigma < 1$  vil produktionen,  $Y$ , i (3.3) gå mod nul, hvis én af produktionsfaktorerne går mod nul. Derfor siges det, at begge faktorer er essentielle (uundværlige). Er  $\sigma > 1$  er dette ikke tilfældet.

**Figur 3.8.** CES-funktionen med  $\sigma = 0.1$  og forskellige  $\delta$ 'er



Idet vi lader  $\sigma$  gå mod nul, vil udtrykket med  $P_1/P_2$  i (3.7) gå mod én, når priserne holdes konstante. Når  $\sigma$  går mod nul, skal  $\delta$  så justeres modsat på en passende måde, således at  $\Phi$  er uforandret:

$$\Phi = \left( \frac{\delta}{1-\delta} \right)^\sigma \Leftrightarrow \delta = \frac{\Phi^{1/\sigma}}{1 + \Phi^{1/\sigma}}, \quad \Phi > 0. \quad (3.8)$$

Hvis vi lader priserne være konstante og lig én, kan vi lave følgende skema for, hvad  $\delta$  skal være, givet  $\sigma$  og  $\Phi$ .

**Tabel 3.1.** Størrelsen af  $\delta$  givet forskellige værdier af  $\sigma$  og  $\Phi$  (og  $P_1 = P_2 = 1$ )

	$\Phi = 1$	$\Phi = 2$	$\Phi = 4$	$\Phi = 8$
$\sigma = 0.40$	0.50	0.85	0.970	0.9945
$\sigma = 0.20$	0.50	0.970	0.99902	0.999969
$\sigma = 0.10$	0.50	0.99902	0.99999905	0.999999999

Man ser tydeligt, at når det faste forhold mellem faktorerne ( $\Phi$ ) afviger fra én (45°-linjen), skal substitutionselasticiteten ( $\sigma$ ) ikke flyttes ret meget, før man får voldsomme påvirkninger af  $\delta$ . Matematisk set er dette ligegyldigt, men i praksis giver det naturligvis problemer for en computer, som kun kan regne med et begrænset antal betydende cifre. Specielt har en iterativ estimationsalgoritme det vanskeligt, fordi den skal gå med *meget* varsomme skridt for ikke at falde ud over kanten, svarende  $\delta < 0$  eller  $\delta > 1$ .

Derfor er det rigtigt, at man bør skalere sine faktorer på en måde, så forholdet mellem dem i gennemsnit er omkring én – og så i øvrigt huske at skalere de til-

svarende faktorpriser modsat, så omkostningerne er uforandrede. Men det er vigtigt at gøre sig klart, at dette er en praktisk foranstaltning, udelukkende som følge af, at der er grænser for, hvor mange betydende cifre en computer kan regne med.

### En mulig omparametrisering af CES-funktionen

Ovenstående leder til, at man kunne overveje at omparametrisere CES-funktionen for at gøre livet lettere for estimationsalgoritmen. En oplagt idé kunne være at indsubstituere (3.8) i CES-funktionen, således at man estimerede  $\Phi$  i stedet for  $\delta$ . Imidlertid er det bekvemt at omparametrisere endnu en gang og i stedet for  $\Phi$  operere med  $\phi$ , givet som

$$\phi = \log(\Phi) = \sigma \log\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) \Leftrightarrow \delta = \frac{\exp(\phi/\sigma)}{1 + \exp(\phi/\sigma)}, \quad -\infty < \phi < \infty. \quad (3.9)$$

Det rare ved denne omparametrisering er, at "parameterrummet" for  $\phi$  er ubegrænset, og sættes dette udtryk for  $\delta$  ind i (3.3) får vi så den omparametriserede CES-produktionsfunktion som

$$Y = \kappa \left[ \frac{\exp(\phi/\sigma)}{1 + \exp(\phi/\sigma)} X_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \frac{1}{1 + \exp(\phi/\sigma)} X_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \quad (3.10)$$

De afledte faktorefterspørgsler bliver:

$$X_1^* = \left( \frac{\exp(\phi/\sigma)}{1 + \exp(\phi/\sigma)} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{Y}{\kappa} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\sigma} \exp\left(\frac{\phi}{\sigma-1}\right) + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (3.11)$$

$$X_2^* = \left( \frac{1}{1 + \exp(\phi/\sigma)} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{Y}{\kappa} \left[ \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{1-\sigma} \exp\left(\frac{\phi}{1-\sigma}\right) + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}. \quad (3.12)$$

Man bemærker specielt, at OLS-ligningen (3.6) nu kan skrives som

$$\log\left(\frac{X_1^*}{X_2^*}\right) = -\sigma \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \phi, \quad (3.13)$$

så (3.9) beskriver faktisk også, hvordan man beregner  $\delta$  ud fra konstantleddet ( $\phi$ ) og  $\sigma$  i en almindelig OLS-estimation. Se alternativt Kmenta (1967) for en logaritmisk taylorapproksimation af CES-funktionen.

### CES-omkostningsfunktionen

Da vi senere vil se på to populære såkaldte omkostningsfunktioner, tror jeg det er en fordel at se på, hvorledes CES-omkostningsfunktionen udledes fra faktorefter-spørgslerne. De samlede omkostninger er givet ved  $C = P_1X_1 + P_2X_2$ , og vi definerer nu *minimums*omkostningerne som de omkostninger, virksomheden har, givet at produktionsfaktorerne har tilpasset sig til deres optimale (omkostningsminimerende) niveauer. Vi får altså, at

$$C^* = P_1X_1^* + P_2X_2^* = C^*(Y, P_1, P_2) . \quad (3.14)$$

Minimumsomkostningerne afhænger kun af produktionsniveauet og faktorpriserne, idet  $X_1^*$  og  $X_2^*$  substitueres væk ved at indsætte (3.4) og (3.5) i (3.14). Det kan vises, at (3.14) kan reduceres til

$$C^* = \frac{Y}{\kappa} \left[ \delta^\sigma P_1^{1-\sigma} + (1-\delta)^\sigma P_2^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} . \quad (3.15)$$

Dette er CES-(minimums)omkostningsfunktionen, som i formen har en del lighed med CES-produktionsfunktionen. Disse to funktioner kaldes *duale*, idet de begge beskriver isokvanternes udseende (dvs. teknologien) på udtømmende vis. Der er således indeholdt *præcis den samme* information i omkostningsfunktionen som i produktionsfunktionen – hverken mere eller mindre – og til en givet produktionsfunktion svarer én og kun én omkostningsfunktion og vice versa.

Desuden kan man også overbevise sig om, at denne omkostningsfunktion er homogen af første grad i priserne, hvilket er helt analogt til, at faktorefterspørgselsfunktionerne er homogene af nulte grad i priserne. Hvis alle faktorpriserne stiger med én procent, vil dette ikke give anledning til en ændret faktorsammensætning, og de samlede omkostninger stiger så også bare med én procent. Desuden vil der gælde, at hvis omkostningsfunktionen er konkav, vil den bagvedliggende duale produktionsfunktion være kvasikonkav.

Noget andet er så, at fordi man har skrevet den ene op, skal man ikke være sikker på, at man også kan skrive den anden op analytisk. Men i de tilfælde, hvor den anden ikke lader sig skrive op analytisk (typisk den til en given omkostningsfunktion svarende produktionsfunktion), må man ikke tro, at den ikke "eksisterer". Det gør den, men den lader sig ikke skrive op og må evt. itereres frem.<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Hvis man ikke kan komme fra produktionsfunktionen til omkostningsfunktionen, kan dette kun skyldes, at man ikke kan skrive de optimale faktorefterspørgselsligninger analytisk op (dvs. løse førsteordensbetingelserne). Sådanne produktionsfunktioner må derfor være sjældne i empiriske anvendelser.

### Shephards Lemma

Nu kan man så spørge, hvorfor man overhovedet skulle interessere sig for omkostningsfunktioner? Begrundelsen er, at det er overmåde simpelt at komme fra omkostningsfunktioner til faktorefterspørgselsfunktioner vha. Shephards Lemma, som siger, at<sup>10</sup>

$$X_i^* = X_i^*(Y, P_1, \dots, P_n) = \frac{dC^*(Y, P_1, \dots, P_n)}{dP_i} . \quad (3.16)$$

Man differentierer altså bare omkostningsfunktionen mht. faktorpris  $i$  for at få faktorefterspørgselsligning  $i$ . Hvis man gør dette for CES-omkostningsfunktionen (3.15) vil man da også få faktorefterspørgslerne (3.4) og (3.5). For faktor nummer ét gælder der altså, at

$$\frac{d \left( \frac{Y}{\kappa} \left[ \delta^\sigma P_1^{1-\sigma} + (1-\delta)^\sigma P_2^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)}{dP_1} = \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{Y}{\kappa} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\sigma} \left( \frac{1-\delta}{\delta} \right)^\sigma + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} . \quad (3.17)$$

Da vi får de samme faktorefterspørgsler, er CES-omkostnings- og -produktionsfunktioner som tidligere nævnt *duale*.

### Afsluttende bemærkning om omkostningsfunktioner

Det rare ved omkostningsfunktioner er, at man slipper for at skulle finde faktorefterspørgslerne ved at løse førsteordensbetingelser, idet man i stedet blot differentierer omkostningsfunktionen, og så er man færdig. Det gør det også meget lettere at gennemskue, hvorledes de til en given omkostningsfunktion svarende faktorefterspørgsler kommer til at se ud, for hvis man alternativt begynder med produktionsfunktion, er det ofte meget vanskeligt at gennemskue, hvorledes de afledte faktorefterspørgsler kommer til at se ud, eller som Deaton (1978) skriver (om nyttefunktioner i stedet for produktionsfunktioner):

The econometrician has exactly the situation of the child's puzzle where there are a dozen strings leading to a dozen destinations and, although the loose ends are visible, everything is in an impossible tangle in the middle. This causes difficulties in both directions. On the one hand, one has very little idea, in general, what the specification of utility has on the demand functions, especially when it is difficult to discover precise analytical forms. More important, perhaps, is the curtain drawn between statistical inference and theoretical specification. We know a lot about behaviour, we know what shapes Engel curves are and are not, we know what we expect about expenditure and price elasticities, and yet it is

---

<sup>10</sup>Se fx Chambers (1988) for udledning og grafisk illustration af Shephards Lemma. Se evt. Diewert (1971) for en meget grundig (og teknisk) gennemgang af lemmeet.



extremely difficult to say what implications this evidence has for the shape of the direct utility function.<sup>11</sup>

### 3.1.2. Generaliseret Leontief Omkostningsfunktion (GLO)

GLO-funktionen stammer fra Diewert (1971), og har formentlig – næst efter translogfunktionen – været den mest benyttede såkaldt fleksible funktionsform. Med kun to produktionsfaktorer og konstant skalaafkast er GLO-funktionen givet som<sup>12</sup>

$$C^* = Y \left[ \beta_{11} P_1^{0.5} P_1^{0.5} + \beta_{12} P_1^{0.5} P_2^{0.5} + \beta_{21} P_2^{0.5} P_1^{0.5} + \beta_{22} P_2^{0.5} P_2^{0.5} \right]. \quad (3.18)$$

Funktionen er umiddelbart homogen af første grad i faktorpriserne, og vi sætter med det samme  $\beta_{21}$  lig  $\beta_{12}$ , da de ikke ville kunne identificeres hver for sig (de har samme regressorer). Faktorefterspørgslerne følger ved at differentiere denne funktion mht. hver af de to faktorpriser (Shephards Lemma, se evt. foregående side):

$$X_1^* = Y \left[ \beta_{11} + \beta_{12} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{0.5} \right] \quad (3.19)$$

$$X_2^* = Y \left[ \beta_{22} + \beta_{12} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{0.5} \right]. \quad (3.20)$$

I faktorefterspørgslerne er der således tre parametre,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$  og  $\beta_{22}$ , svarende til CES-funktionens  $\kappa$ ,  $\delta$  og  $\sigma$ . Det ses, at hvis faktorens egenpris  $P_i$  vokser sig meget stor (relativt til den anden faktorpris), vil faktoren selv gå mod  $\beta_{ii}Y$ , mens den anden faktor går mod uendelig (givet at  $\beta_{12} > 0$ , hvilket er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at isokvanterne er konvekse). Hvis  $\beta_{ii}$  er positiv ligner denne opførsel fuldstændigt det, vi så for CES-funktionen, når  $\sigma < 1$ , og man kan fortolke  $\beta_{ii}$  som en "minimums-i-o-koefficient", som man ikke kan presse forbruget af faktor  $i$  ned under. Hvis  $\beta_{ii}$  er negativ har vi naturligvis et problem, idet en kraftig forøgelse af faktorens egen pris eller et kraftigt fald i den anden faktors pris vil efterlade os med et negativt tal, og i det tilfælde er vi så kommet uden for konsistensområdet. Man kan derfor vise, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse

---

<sup>11</sup>Deaton (1978), side 526.

<sup>12</sup>Den findes også i en produktionsfunktions-udgave, som imidlertid *ikke* er dual til GLO-funktionen (jf. evt. Diewert (1971)). Her kigger vi kun på omkostningsfunktionen.

for, at GLO-funktionen er globalt konsistent er, at alle  $\beta$ 'erne er positive.<sup>13</sup> Sættes som specialtilfælde  $\beta_{12} = 0$ , bliver begge faktorer i-o-bestemte (Leontief-isokvanter) – heraf navnet på omkostningsfunktionen.

Som vi skal se senere i afsnit 5.3.1, er den "bagvedliggende" GLO-produktionsfunktion i tofaktor tilfældet givet ved sammenhængen

$$\left(\frac{X_1}{Y} - \beta_{11}\right)\left(\frac{X_2}{Y} - \beta_{22}\right) = \beta_{12}^2 \quad (3.21)$$

Indtil videre noterer vi os blot, at sammenhængen følger af at isolere udtrykket  $P_1/P_2$  i en af faktorligningerne og indsætte dette i den anden ligning. Af ligningen ses, at isokvanterne simpelthen er parallelforskudte hyperbler, som skærer akse  $i$  hvis og kun hvis  $\beta_{ii} < 0$ .<sup>14</sup>

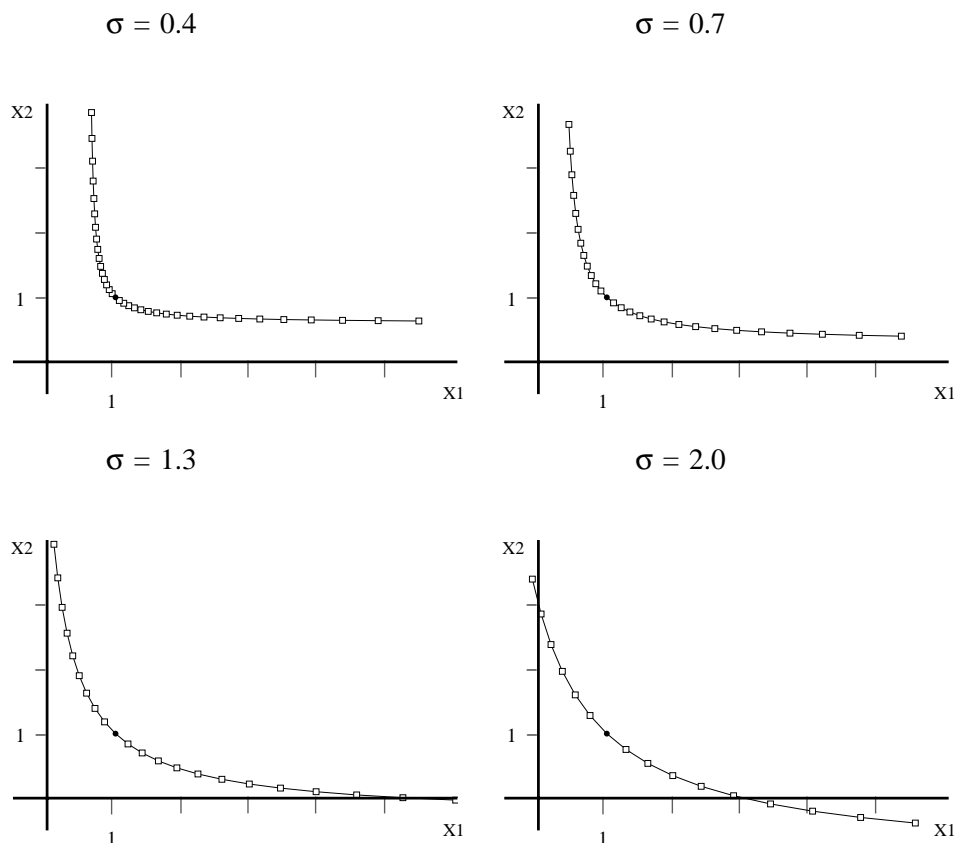
For at blive lidt klogere på GLO-funktionen, vises i det følgende isokvanter helt analoge til CES-funktionen, idet GLO-funktionens parametre er sat på en måde, som gør, at den viste isokvant dels går igennem punktet (1, 1) og dels har samme krumning som CES-funktionen i dette punkt (svarende til at afstanden mellem firkanterne omkring (1, 1) er den samme som for CES-funktionen). Vi lader altså GLO-funktionen approksimere CES-funktionen "lokalt", og det interessante er så at se på, hvordan den opfører sig langt væk fra dette punkt.<sup>15</sup>

---

<sup>13</sup>Restriktionen  $\beta_{12} > 0$  (strengt taget  $\geq 0$ ) sikrer, at isokvanterne krummer den rigtige vej. Restriktionerne  $\beta_{11} > 0$  og  $\beta_{22} > 0$  sikrer os, at faktorforbruget ikke kan blive negativt. Disse ting tilsammen sikrer, at funktionen er globalt konsistent, således at vi bl.a. ikke risikerer at få positive egenpris-elasticiteter eller negative faktorniveauer.

<sup>14</sup>For præcisionens skyld: vi kigger kun på den ene "halvdel" af hyperblen. Det er den anden halvdel (spejlingen i punktet  $(\beta_{11}, \beta_{22})$ ) man får frem, hvis man i faktorligningerne (3.19) og (3.20) sætter  $\beta_{12} < 0$ , og denne kurve krummer naturligvis den forkerte vej.

<sup>15</sup>Jeg vil ikke her gå i detaljer med, hvordan GLO-funktionens (og senere også translogfunktionens) parametre "kalibreres", men blot henvise til Despotakis (1986).

**Figur 3.9. Isokvanter for GLO-funktionen**

Sammenlignes med figur 3.7 side 21, ses GLO-funktionen at opføre sig ganske nydeligt, så længe  $\sigma < 1$ . Her er alle GLO-funktionens  $\beta$ 'er positive og GLO-funktionen er derfor globalt konsistent. I tilfældet  $\sigma = 1.3$  ser approksimationen også udmærket ud, men da  $\beta_{11}$  og  $\beta_{22}$  er lig  $-0.3$ , har kurven vandret og lodret asymptote for disse værdier, og den skærer akserne 5.3 enheder ude. Det er imidlertid ikke nødvendigvis noget, som behøver at bekymre os, idet vi i så fald taler om, at den relative pris skal ændres med mere end en faktor 10 (der er 9 firkanter, før akserne skæres, og  $1.30^9 > 10$ , idet den relative pris som tidligere nævnt ændres med 30% pr. firkant). For  $\sigma = 2.0$  ser det imidlertid mindre godt ud for GLO-funktionen, idet en femdobling af  $P_1$  ville give et negativt forbrug af  $X_1$ . I stedet for som CES-funktionen at tangere akserne, krydser GLO-isokvanten akserne 3.0 enheder ude for at ende med asymptoter  $X_1 = -1$  hhv.  $X_2 = -1$ .

Ud fra dette må konklusionen blive, at GLO-funktionen er des bedre, desto mindre substitution der er tale om.

### 3.1.3. Translog-omkostningsfunktionen

Translogfunktionen (Transcendental Logarithmic) har været den mest benyttede fleksible funktionsform gennem de sidste tyve år, og som tilfældet er for GLO-funktionen, findes den både i en produktionsfunktions- og omkostningsfunktionsudgave. Disse to er imidlertid ikke duale, og vi kigger i det følgende udelukkende på translogomkostningsfunktionen.

The literature has produced something of a competition in the development of exotic functional forms. However, the translog function has remained the most popular, and by one account, ... , is the most reliable of several available alternatives.<sup>16</sup>

Translogfunktionen er først beskrevet i Christensen/Jorgenson/Lau (1971), og den kan opfattes som en andenordens logaritmisk taylorapproximation til en vilkårlig omkostningsfunktion. Den ser med to produktionsfaktorer og konstant skalaafkast ud som følger:

$$\begin{aligned} \log(C^*) = & \alpha_0 + \log(Y) + \alpha_1 \log(P_1) + \alpha_2 \log(P_2) \\ & + 0.5 \left[ \alpha_{11} \log(P_1) \log(P_1) + \alpha_{12} \log(P_1) \log(P_2) \right. \\ & \left. + \alpha_{21} \log(P_2) \log(P_1) + \alpha_{22} \log(P_2) \log(P_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vi sætter  $\alpha_{21}$  lig  $\alpha_{12}$  (da de ikke kan identificeres hver for sig). Pålægelse af pris-homogenitet kræver nu, at  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , samt at matricen af  $\alpha_{ij}$ 'erne summer til nul rækkevis (og dermed også søjlevis pga.  $\alpha_{21} = \alpha_{12}$ ). I tofaktortilfældet må der derfor gælde, at  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = -\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ . Translog-omkostningsfunktionen med disse restriktioner bliver:

$$\log(C^*) = \alpha_0 + \log(Y) + \log(P_2) + \alpha_1 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + 0.5 \alpha_{11} \left[ \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \right]^2 \quad (3.23)$$

En omskrivning af Shephards Lemma giver, at

$$\frac{dC^*}{dP_i} = X_i^* \Leftrightarrow \frac{dC^*/C^*}{dP_i/P_i} = \frac{P_i X_i^*}{C^*} \Leftrightarrow \frac{d\log(C^*)}{d\log(P_i)} = s_i^* , \quad (3.24)$$

---

<sup>16</sup>Greene (1993), side 504 (note 25).

hvor  $s_i^*$  er faktor  $i$ 's omkostningsandel. Ved at differentiere (3.23) logaritmisk får vi følgende ligninger for omkostningsandelene:

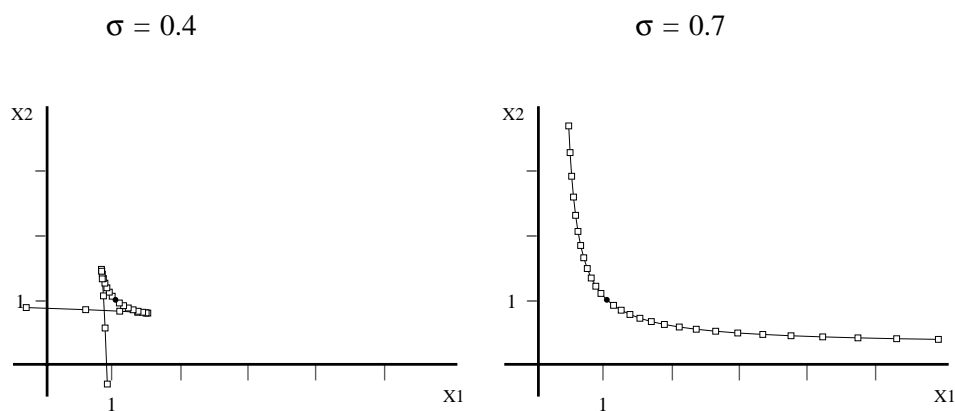
$$s_1^* = \alpha_1 + \alpha_{11} \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad \text{og} \quad s_2^* = (1 - \alpha_1) + \alpha_{11} \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right). \quad (3.25)$$

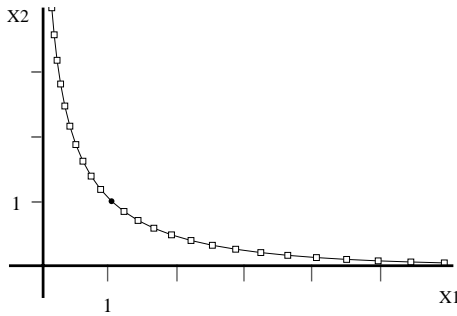
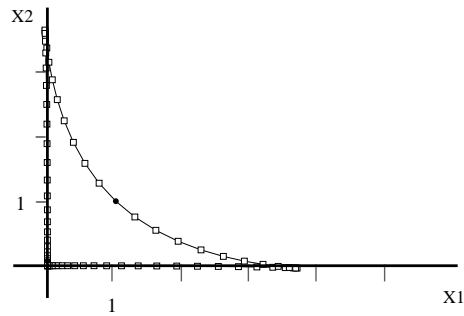
Translogomkostningsfunktionen giver altså ligninger for omkostningsandelene, som er helt lineære i parametrene. Disse ligninger bruges da også ofte direkte til estimation, men alternativt kan man estimere faktorefterspørgselsfunktionerne, givet som:

$$X_1^* = \frac{s_1^* C^*}{P_1} \quad \text{og} \quad X_2^* = \frac{s_2^* C^*}{P_2}, \quad (3.26)$$

hvor udtrykkene for  $C^*$ ,  $s_1^*$  og  $s_2^*$  tages fra (3.23) og (3.25). Der er tre parametre i translogfunktionen,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  og  $\alpha_{11}$ , svarende til CES-funktionens  $\kappa$ ,  $\delta$  og  $\sigma$  og GLO-funktionens  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$  og  $\beta_{22}$ . Vi kan nu tegne isokvanter op for translogfunktionen vha. faktorefterspørgselsfunktionerne i (3.26), og som tidligere tvinger vi translogfunktionen til at have samme krumning som CES-funktionen i punktet (1, 1).

**Figur 3.10. Isokvanter for translog-funktionen**



$\sigma = 1.3$  $\sigma = 2.0$ 

Translogfunktionen ses at opføre sig pænt for  $\sigma = 0.7$  og  $\sigma = 1.3$ , mens det ser mindre godt ud for  $\sigma = 0.4$ . Her kan translogfunktionen kun klare, at den relative pris ændrer sig med en faktor otte, før den begynder at opføre sig ret uforudsigeligt. For  $\sigma = 2.0$  ses det, at isokvanten skærer akserne når den relative pris ændres med en faktor otte, men det til trods opfører den sig dog alligevel bedre end GLO-funktionen i det tilfælde (jf. side 29).

Sammenfattende fremgår det, at translogfunktionen er bedst i omegnen af  $\sigma = 1$ . Translogfunktionen er faktisk kun globalt konsistent for  $\sigma = 1$  (hvor den reduceres til Cobb-Douglas – omkostningsandelene er konstante), men for  $\sigma > 1$  (hvor hverken GLO- og translogfunktionen er globalt konsistente), må man alligevel sige, at translog er bedre end GLO.

### 3.1.4. Forskellige omkostningsandele

I bilag A kan man se, hvad der sker, hvis øvelsen med at tegne isokvanter opgentages, blot med en omkostningsandel for den første faktor på 20% i stedet for 50%. Dette accentuerer problemerne for de to fleksible funktionsformer, så en sidste konklusion må blive, at hverken GLO- eller translogfunktionerne har det alt for godt med meget små omkostningsandele.

## 3.2. Funktioner med mere end to produktionsfaktorer

I afsnit 3.1.1 blev vi præsenteret for tofaktor CES-funktionen med konstant skalaafkast. Vi så, at den i et enkelt punkt kan sættes til at krumme fuldstændigt efter ønske, og at denne krumning "styres" af parameteren  $\sigma$ . I et givet punkt kan vi altså få en hvilken som helst substitution frem, og derfor siger man også, at tofaktor CES-funktionen er fuldt fleksibel (i Diewerts forstand).

Diewert (1974) kræver, at den fleksible form i et givet punkt kan fungere som en andenordens (taylor)approximation til en vilkårlig omkostningsfunktion. I tilfældet med konstant skalaafkast er det derfor et nødvendigt krav, at der med  $n$  produktionsfaktorer skal være  $n(n+1)/2$  parametre til at beskrive isokvanterne. For  $n = 2$  kræves således 3 parametre, mens der for  $n = 3$  kræves 6 parametre.

### 3.2.1. CES-funktionen med tre faktorer

Desværre lader det sig ikke uden videre gøre at generalisere tofaktor CES-funktionen til flere produktionsfaktorer, uden at den mister sin fleksibilitet. Alligevel har CES-funktionen fundet anvendelse med mere end to faktorer, idet man har opereret med den såkaldte "nestede" CES-funktion. At den er nestet, vil sige, at den er brugt på sig selv successivt – med tre faktorer som følger:

$$Y = \text{CES}(\text{CES}(X_1, X_2), X_3) . \quad (3.27)$$

Vi får så produktionsfunktionen givet som

$$Y = \kappa_2 \left[ \delta_2 \left\{ \left[ \delta_1 X_1^{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1}} + (1-\delta_1) X_2^{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1}} \right]^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}} \right\}^{\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2}} + (1-\delta_2) X_3^{\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2}} \right]^{\frac{\sigma_2}{\sigma_2-1}} . \quad (3.28)$$

Indholdet i den krøllede parentes kalder vi det *inderste* nest (eller  $X_1 X_2$ -"aggregatet"), og til dette nest hører parametrene  $\delta_1$  og  $\sigma_1$ . Til det *yderste* nest hører så parametrene  $\kappa_2$ ,  $\delta_2$  og  $\sigma_2$ .<sup>17</sup> Man bemærker specielt, at hvis vi sætter de to substitutionselasticiteter lig hinanden,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , reduceres systemet til den traditionelle generalisation af CES-funktionen, idet vi så får, at

$$Y = \kappa_2 \left[ \delta_2 \delta_1 X_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \delta_2 (1-\delta_1) X_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta_2) X_3^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} , \quad (3.29)$$

hvor  $\delta_2 \delta_1 + \delta_2 (1-\delta_1) + (1-\delta_2)$  er lig én. Hvis vi tæller parametrene op, kan vi se, at der i det nestede tilfælde mangler  $6 - 5 = 1$  parameter i, at funktionen er fuldt fleksibel, mens der i det ikke-nestede tilfælde mangler  $6 - 4 = 2$  parametre.

Som vi har skrevet den nestede CES-funktion op, er det  $X_1$  ( $K$ ) og  $X_2$  ( $L$ ), som står inderst, mens  $X_3$  ( $E$ ) står yderst. Det skriver vi med notationen  $((KL)E)$ , men det er oplagt, at vi lige så godt kunne have lavet en  $((KE)L)$  eller en  $((LE)K)$ -funktion. Med  $((KE)L)$ -nestningsstruktur pålagt, siger man også, at produktionsfunktionen er (svagt) separabel i  $L$ , idet ændringer i størrelsen af  $P_L$  ikke påvirker *forholdet* mellem  $K$  og  $E$  (men nok niveauerne). En anden måde at sige det på er, at kapitalens

---

<sup>17</sup>Man undrer sig måske over, hvorfor  $\kappa_1$  ikke er med. Det skyldes, at CES-funktionen er skalainvariant, således at enhver ændring i  $\kappa_1$  ville kunne "modposteres" 100% i  $\delta_2$  og  $\kappa_2$ , og  $\kappa_1$  ville derfor ikke kunne identificeres.

og energiens lønelasticitet er ens, som vist med gråtoner i følgende eksempel (som er taget fra kapitel 7):

**Tabel 3.2. Partielle priselasticiteter med ((KE)L)-nestningsstruktur**

	$P_1 (P_K)$	$P_2 (P_L)$	$P_3 (P_E)$
$X_1 (K)$	-0.26	0.31	-0.05
$X_2 (L)$	0.07	-0.09	0.02
$X_3 (E)$	-0.21	0.31	-0.10

En sådan matrix af partielle priselasticiteter er altid symmetrisk i fortegn (således at når  $X_3$ 's elasticitet mht.  $P_1$  er negativ, vil  $X_1$ 's elasticitet mht.  $P_3$  også være det), og diagonalelementerne (egenpriselasticiteterne) skal være negative (eller lig nul). Med ((KE)L)-struktur er to af elasticiteterne bundet til at være ens, og det er præcis dette bånd, som gør, at den nestede trefaktor CES-funktion ikke er fuldt fleksibel i Diewerts forstand (mangler én "frihedsgrad"), idet en helt fleksibel form ikke ville have dette bånd.

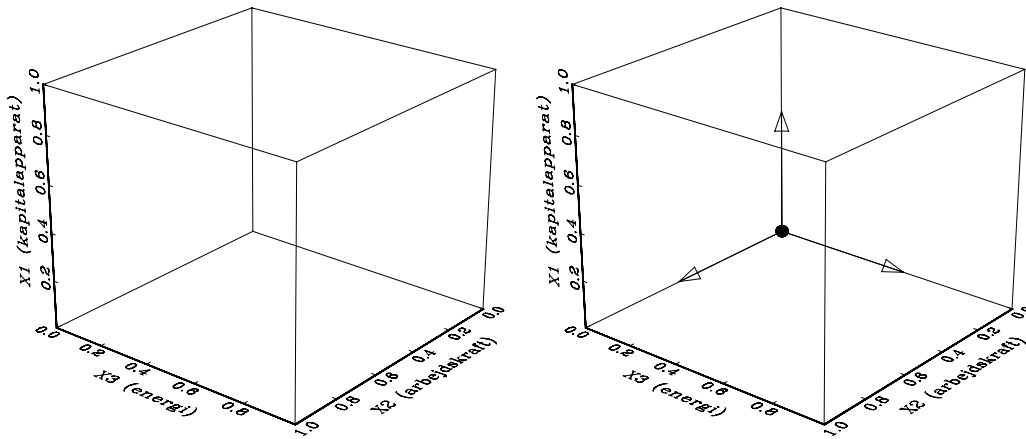
Da det ikke er hensigten at arbejde videre med den nestede CES-funktion, vil jeg ikke her gå i detaljer med, hvordan man udleder faktorefterspørgsler fra den nestede CES-funktion. Den interesserede læser henvises i stedet til papiret Thomsen/Hansen/Smidt (1993) for en gennemgang af firefaktor nestet CES med tilhørende faktorefterspørgselsfunktioner.

Imidlertid er det yderst illustrativt – og en god opvarmning til de følgende kapitler – at prøve at se nogle tredimensionelle isokvanter for trefaktor nestet CES, her nestet med ((KE)L)-nestningsstruktur. Som i de tidligere todimensionelle isokvanter for CES-, GLO- og translogfunktionen har vi tvunget isokvanterne til at gå igennem det samme punkt – markeret med en sort cirkel i punktet  $(K, L, E) = (0.4, 0.4, 0.4)$ .

De tredimensionelle isokvanter er tegnet ind i et koordinatsystem, som vender på følgende måde:

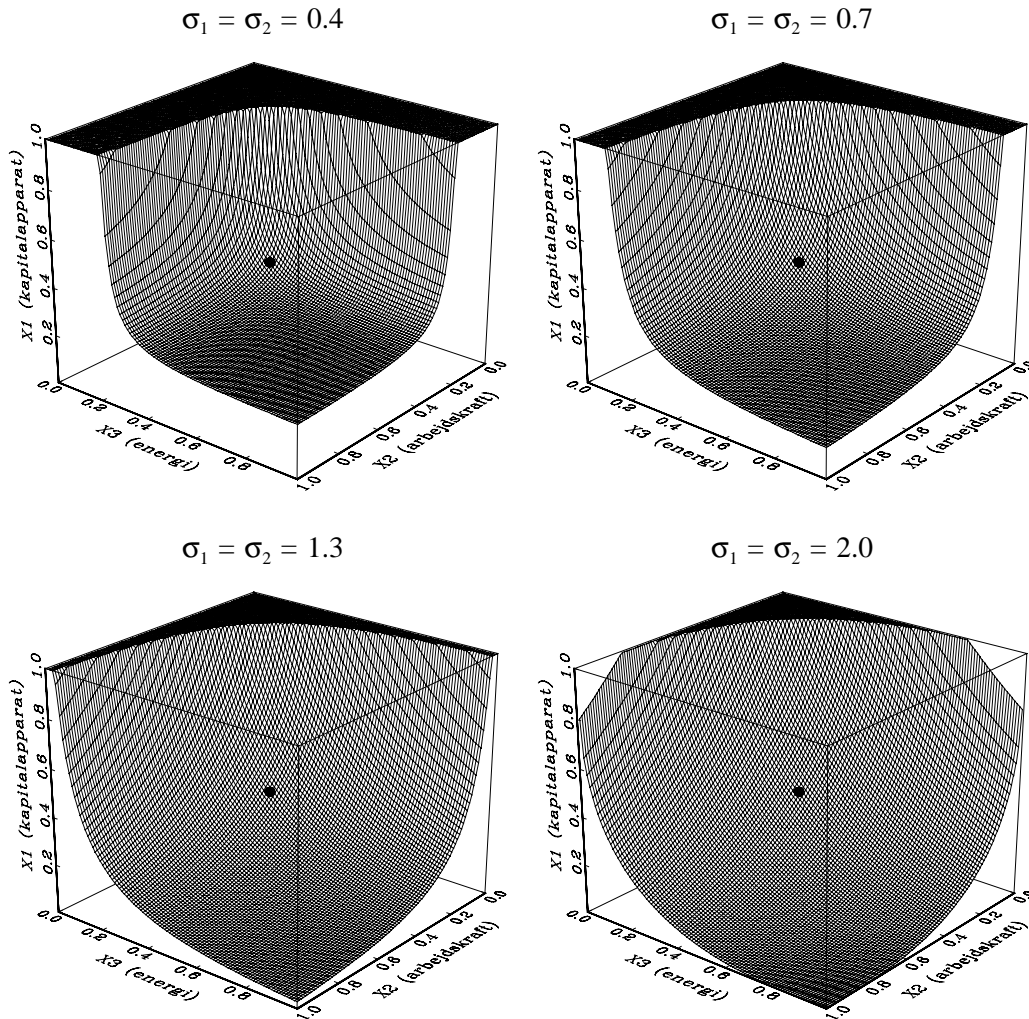


**Figur 3.11. Det tredimensionelle koordinatsystem**



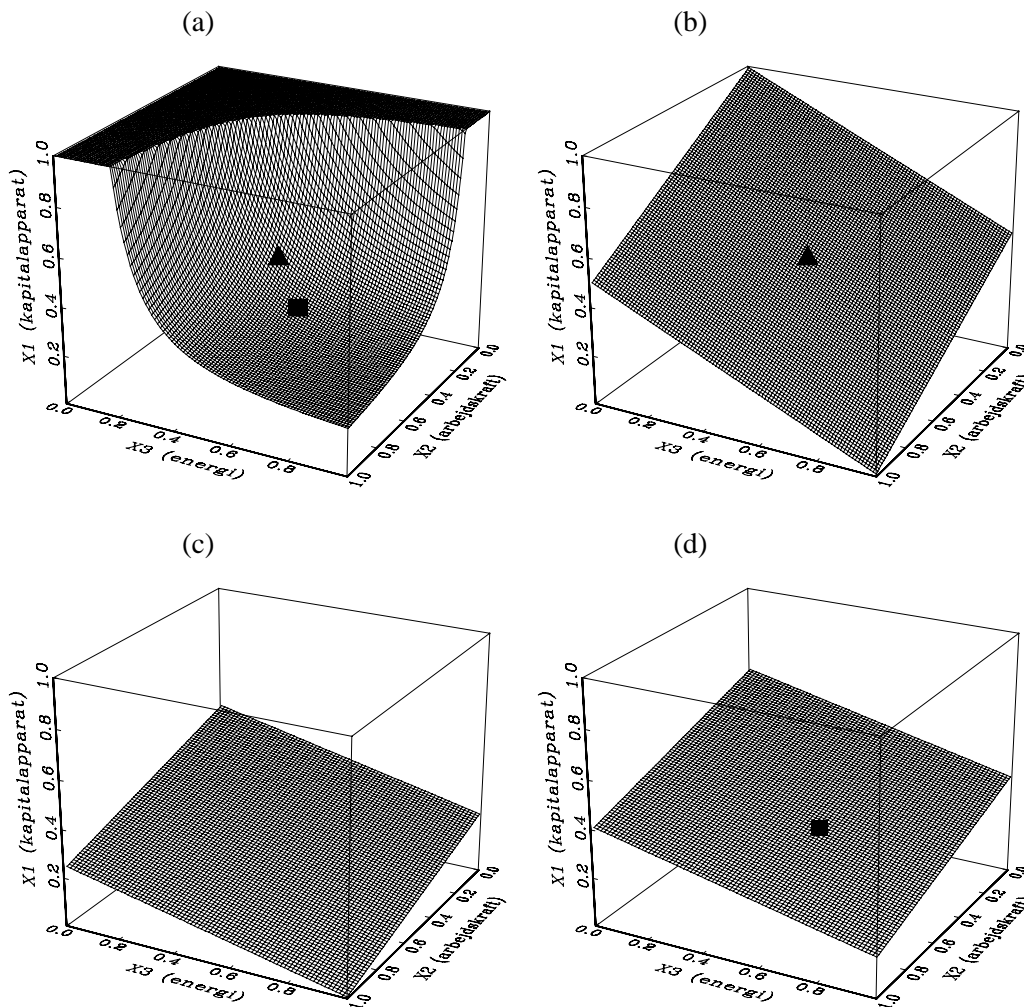
Som det ses, ligger origo (punktet  $(0, 0, 0)$ ) nederst i det hjørne af kassen, som er længst væk. Kapitalapparatet er på den akse, som peger opad, mens arbejdskraften er på den akse, som peger til venstre (set herfra), mens energien er på den akse, som peger til højre. Vi kan nu tegne nogle isokvanter op i det tilfælde, hvor der er samme substitutionselasticitet i indre og ydre nest, svarende til den almindelige (ikke-nestede) generalisation af CES-funktionen.

**Figur 3.12. Tredimensionelle isokvanter for almindelig generaliseret (ikke-nestet) CES**



Disse isokvanter er der måske ikke så meget nyt i, eftersom de blot er tredimensionelle udgaver af de isokvanter, vi allerede har set for tofaktor CES-funktionen. Vi ser dog som forventet, at jo mindre substitutionen er, jo mere kasseagtig bliver isokvanten, og jo større substitutionen er, jo mere fladeagtig. I det følgende illustreres det så, hvorledes man bevæger sig rundt på isokvanten, hvis faktorpriserne ændres. I dette eksempel er  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.7$ .

Figur 3.13. Illustration af virkningen af en fordobling af  $P_K$

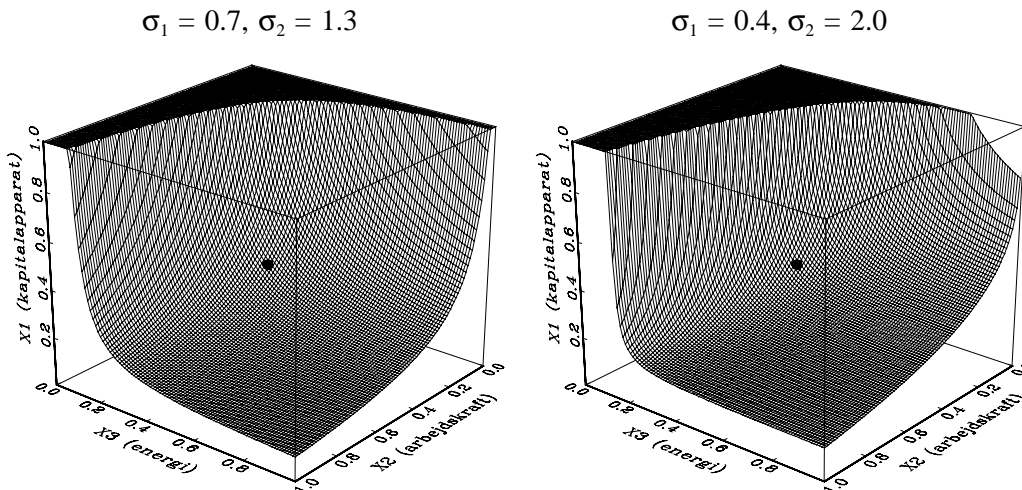


Punktet  $(K, L, E) = (0.5, 0.5, 0.5)$  markeret med en trekant i (a) er udgangssituationen, hvor priserne er ens. I dette punkt tangerer det i (b) viste omkostningsplan isokvanten, på præcis samme måde som man normalt tegner det i tofaktortilfældet. I (c) har vi så fordoblet prisen på kapitalapparatet, svarende til at planet "presses" halvvejs ned ad kapital-aksen (fra at skære kapital-aksen i punktet  $(K, L, E) = (1, 0, 0)$  til at skære i  $(0.5, 0, 0)$ ). Lidt upræcist udtrykt gør denne fordobling af  $P_K$  omkostningsplanet "dobbel så fladt", men planet i (c) tangerer ikke længere isokvanten i (a). I (d) hæver vi til sidst omkostningsplanet, indtil det igen tangerer isokvanten i (a). Dette nye punkt er markeret med en firkant, og i (a) ses det, at

stigningen i  $P_K$  har foranlediget et fald i  $K$  (på 0.13 enheder) og en stigning i både  $L$  og  $E$  (på 0.09 enheder).<sup>18</sup>

Kigger man ovenfor på isokvanterne i figur 3.12 – og gentager ovenstående øvelse for sit indre øje – vil man kunne overbevise sig selv om, at når  $P_K$  stiger, vil både  $L$  og  $E$  også stige, svarende til at  $K$  og  $L$  hhv.  $K$  og  $E$  er substitutter. Mere interessant bliver det, hvis vi (realistisk) prøver at lade substitutionen i det inderste nest (substitutionen mellem  $K$  og  $E$ ) være mindre end substitutionen i det yderste nest (substitutionen mellem  $KE$ -aggregatet (det inderste nest) og  $L$ ). En sådan isokvant illustreres i to tempi i nedenstående figur.

**Figur 3.14. Tredimensionelle isokvanter for CES med  $((KE)L$ -nestningsstruktur**

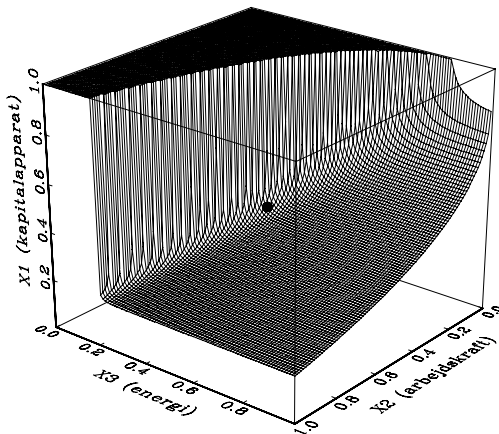


I den venstre figur er det nu mere vanskeligt at se, om forbruget af  $E$  stiger eller falder, når  $P_K$  stiger, mens forbruget af  $L$  tydeligvis stiger. I den højre figur ser det ret klart ud, som om  $E$  falder, når  $P_K$  stiger, hvilket man muligvis bedre kan se efter at have kigget på den følgende figur, hvor substitutionen mellem  $K$  og  $E$  ( $\sigma_1$ ) er gjort endnu mindre:

<sup>18</sup>Denne øvelse er helt analog til den måde, man normalt illustrerer substitutions- og indkomsteffekter på i forbrugsteorien. Hvis (a) er indifferenskurven, betegner bevægelsen fra trekanten til firkanten således substitutionseffekten som følge af, at prisen på vare ét forøges. I (c) kunne man så indtegne det punkt, hvor planet tangerer en lavere indifferenskurve, svarende til et lavere nytteniveau. Bevægelsen fra firkanten til dette punkt ville så betegne indkomsteffekten af prisstigningen. Bevægelsen fra trekanten til firkanten har i nytteteorien sin pendant i de såkaldte kompenserede (Hicks-) efterspørgselskurver, hvor man netop holder nytten konstant (kompenserer forbrugeren for prisstigningen over indkomsten/budgettet).

**Figur 3.15. Tredimensionelle isokvanter for CES med ((KE)L)-nestningsstruktur**

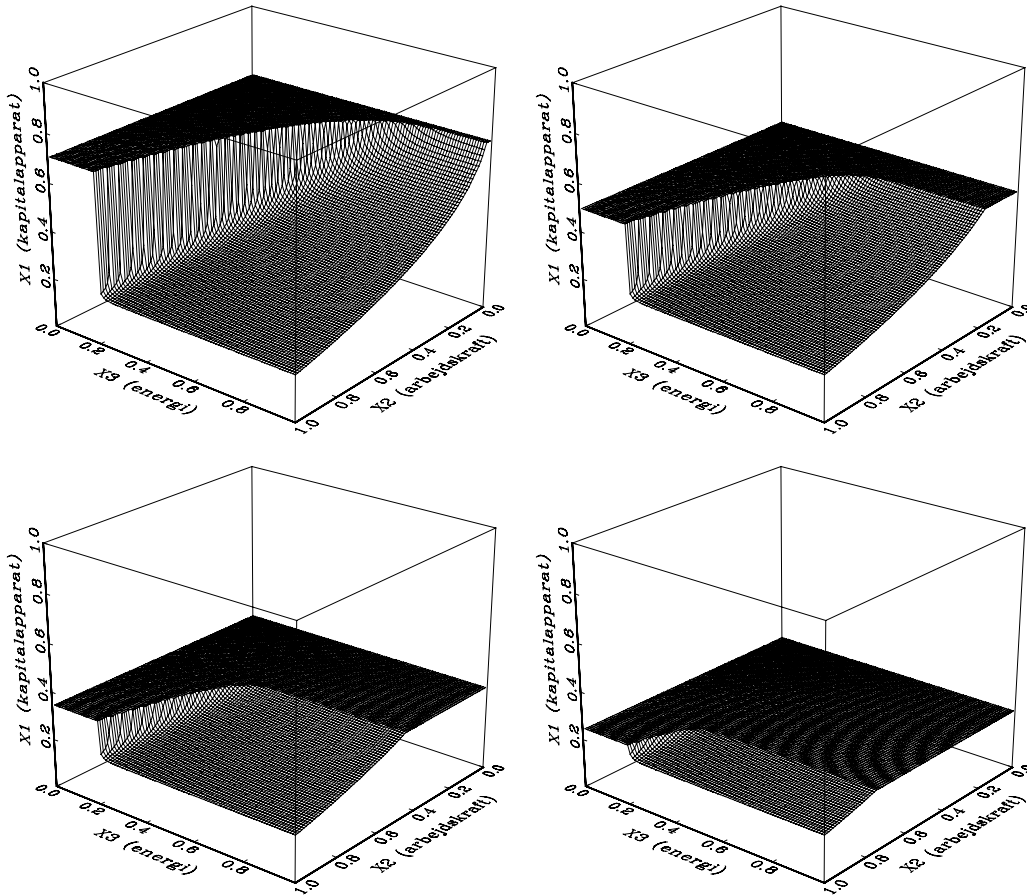
$$\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 2.0$$



I dette ekstreme tilfælde ser vi, at omkostningsplanet næsten uanset hældningen (størrelsen af  $P_K$ ) vil have en tendens til at tangere på den tydelige "kant" mellem  $K$  og  $E$ . Hvis  $P_K$  øges, bevæger vi os således langs kanten mod venstre (set herfra), svarende til et formindsket energiforbrug og et forøget arbejdskraftforbrug. Sænkes  $P_K$  ses det modsatte, og vi siger derfor, at  $K$  og  $E$  er komplementære, idet en stigning i prisen på den ene af disse faktorer vil give et *formindsket* forbrug af den anden.

Den omtalte kant ses måske tydeligere, hvis vi "betinger" på  $K$ , svarende til at skære todimensionelle flader ud af figur 3.15.

Figur 3.16. "Betingelse" på  $K$  (jf. figur 3.15)



Randen på det udskårne sorte område i figurerne er den todimensionelle isokvant mellem  $L$  og  $E$ , betinget af, at  $K$  antager en på forhånd givet værdi. Af disse todimensionelle isokvanter kan man tydeligt se, hvorledes den omtalte "kant" flytter sig indad i  $E$ 's retning og udad i  $L$ 's retning, efterhånden som  $K$  bliver mindre. Vi vil i kapitel 5 gøre brug af en lignende figur, når vi vil illustrere, hvorledes man "betinget" på en af faktorerne (kapitalapparatet); dvs. gør det trægt/givet på kort sigt.

### 3.2.2. GLO-funktionen med fire produktionsfaktorer

Tofaktor GLO-funktionen lader sig uden videre generalisere til mere end to produktionsfaktorer, og det rare ved det er, at den ikke derved taber sin fleksibilitet. Med konstant skalaafkast vil GLO-funktionen have  $n(n+1)/2$  parametre, hvilket præcis er nok til at sikre fuld fleksibilitet i Diewerts forstand (jf. Diewert (1974) eller Diewert/Wales (1987)).

Med fire produktionsfaktorer og konstant skalaafkast ser GLO ud som følger:

$$C^* = Y \sum_i \sum_j \beta_{ij} P_i^{0.5} P_j^{0.5}, \quad i=1, 2, 3, 4 \text{ og } j=1, 2, 3, 4, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}. \quad (3.30)$$

Behageligt nok er omkostningsfunktionen uden videre (dvs. uden restriktioner på parametrene) homogen af første grad i faktorpriserne. Vi kan så bruge Shephards Lemma (se evt. side 26) til at få faktorefterspørgslerne med, og da der tages udgangspunkt i omkostningsfunktionen, vil disse faktorefterspørgsler automatisk blive Slutsky-symmetriske:

$$X_1^* = Y \left[ \beta_{11} + \beta_{12} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{0.5} + \beta_{13} \left( \frac{P_3}{P_1} \right)^{0.5} + \beta_{14} \left( \frac{P_4}{P_1} \right)^{0.5} \right] \quad (3.31)$$

$$X_2^* = Y \left[ \beta_{12} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{0.5} + \beta_{22} + \beta_{23} \left( \frac{P_3}{P_2} \right)^{0.5} + \beta_{24} \left( \frac{P_4}{P_2} \right)^{0.5} \right] \quad (3.32)$$

$$X_3^* = Y \left[ \beta_{13} \left( \frac{P_1}{P_3} \right)^{0.5} + \beta_{23} \left( \frac{P_2}{P_3} \right)^{0.5} + \beta_{33} + \beta_{34} \left( \frac{P_4}{P_3} \right)^{0.5} \right] \quad (3.33)$$

$$X_4^* = Y \left[ \beta_{14} \left( \frac{P_1}{P_4} \right)^{0.5} + \beta_{24} \left( \frac{P_2}{P_4} \right)^{0.5} + \beta_{34} \left( \frac{P_3}{P_4} \right)^{0.5} + \beta_{44} \right]. \quad (3.34)$$

Disse ligninger kan skrives om til de mindre kønne, men mere kompakte og ækvi-valente:

$$X_1^* = Y \left[ \beta_{11} + \left( \beta_{12}P_2^{0.5} + \beta_{13}P_3^{0.5} + \beta_{14}P_4^{0.5} \right) P_1^{-0.5} \right] \quad (3.35)$$

$$X_2^* = Y \left[ \beta_{22} + \left( \beta_{12}P_1^{0.5} + \beta_{23}P_3^{0.5} + \beta_{24}P_4^{0.5} \right) P_2^{-0.5} \right] \quad (3.36)$$

$$X_3^* = Y \left[ \beta_{33} + \left( \beta_{13}P_1^{0.5} + \beta_{23}P_2^{0.5} + \beta_{34}P_4^{0.5} \right) P_3^{-0.5} \right] \quad (3.37)$$

$$X_4^* = Y \left[ \beta_{44} + \left( \beta_{14}P_1^{0.5} + \beta_{24}P_2^{0.5} + \beta_{34}P_3^{0.5} \right) P_4^{-0.5} \right]. \quad (3.38)$$

De partielle priselasticiteter er rimeligt pæne: her først egenpriselasticiteten (for  $X_i^*$ ):

$$e_{ii} = 0.5 \beta_{ii} \left[ \frac{X_i^*}{Y} \right]^{-1} - 0.5 \quad (3.39)$$

Krydspriselasticiteten af  $P_j$  på  $X_i^*$  er:

$$e_{ij} = 0.5 \beta_{ij} \left[ \frac{X_i^*}{Y} \right]^{-1} \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{0.5} \quad (3.40)$$

Man skal her tage  $X_i^*$  fra ligningerne, før elasticiteterne regnes ud. Bemærk, at elasticiteterne givet konstant skalaafkast kun afhænger af de relative faktorpriser og altså er uafhængige af produktionsniveauet.

Hvis et egen- $\beta$  ( $\beta_{ii}$ ) er lig nul, ses det, at egenpriselasticiteten vil være (konstant) lig  $-0.5$ . Hvis egen- $\beta$ 'et er positivt, vil egenelasticiteten altid være større end  $-0.5$  (dvs. tættere på nul) og vice versa. Desuden ses det, at hvis indholdet i den kantede parentes i (3.39) er konstant lig  $\beta_{ii}$ , vil egenelasticiteten være konstant lig nul (Leontief). Dette kan sikres for faktor  $i$  ved – bortset fra  $\beta_{ii}$  – at sætte alle  $\beta$ 'er indeholdende tallet  $i$  i fodtegnet til nul.

Kryds- $\beta$ 'erne siger noget om substitutionen, og det ses, at der er komplementaritet ( $e_{ij} < 0$ ) hvis og kun hvis  $\beta_{ij} < 0$ . Givet  $\beta_{ij} < 0$  vil der altid være komplementaritet mellem  $i$  og  $j$ , uanset faktorprisernes størrelse. Og givet  $\beta_{ij} > 0$  vil der altid være substitution. Således vil krydspriselasticiteterne ikke kunne skifte fortegn.

Der gælder det om GLO-funktionen, at den er globalt konsistent, hvis alle  $\beta$ 'erne er positive. GLO-funktionen er altså globalt konsistent, hvis de estimerede egenpriselasticiteter ligger i området  $[-0.5; 0]$  og der ikke er komplementaritet mellem to eller flere af faktorerne.



## Separabilitet

Af flere forskellige grunde kan det være bekvemt at lægge en eller anden form for separabilitet på GLO-funktionen. Dels kan man argumentere for, at der kan være tale om et hierarki i virksomhedernes beslutningsproces, og dels – men ikke mindst – fordi erfaringen viser, at det store antal frie parametre kan give problemer både med fortolkningen af resultaterne og med konvergens i selve estimationsproceduren.

### *((KLE)M)*-nestningsstruktur

Det første, vi vil gøre, er at regne den parameterrestriktion ud, som gør materialerne,  $M$ , (svagt) separable. Det svarer til, at materialeprisen påvirker alle faktorerne med samme "styrke" (elasticitet), således at en stigning i materialeprisen ikke påvirker *sammensætningen* af  $K$ ,  $L$  og  $E$ , men forøger størrelsen af dem med det samme antal procent. Idet vi lader materialerne være faktor nummer fire, kommer matricen med partielle priselasticiteter til at se ud som følger, idet de bundne elasticiteter er markeret med gråtoner.

**Tabel 3.3.** *((KLE)M)*-nestning

	$P_1 (P_K)$	$P_2 (P_L)$	$P_3 (P_E)$	$P_4 (P_M)$
$X_1 (K)$	-0.30	0.22	-0.07	0.14
$X_2 (L)$	0.05	-0.21	0.02	0.14
$X_3 (E)$	-0.28	0.28	-0.14	0.14
$X_4 (M)$	0.02	0.09	0.01	-0.11

Denne restriktion kan ikke opretholdes for alle værdier af de forklarende variabler, hvilket skyldes, at elasticiteterne afhænger af faktorpriserne, jf. (3.39) og (3.40), og derfor ikke vil være konstante – og heller ikke bevæge sig ens – over tid. Man må derfor nøjes med at pålægge restriktionen i et enkelt år, og i estimationerne i kapitel 7 er valgt året 1989, som er det sidste "endelige" år for de benyttede data. Man kunne dog lige så godt have valgt et år midt i estimationsperioden, men præsentationsmæssigt er det mere bekvemt med 1989. Separabiliteten er ikke særligt vanskelig at lægge på. Man tager ligningen for krydspriselasticiteten (3.40) og sætter

$$e_{14} = e_{24} = e_{34} , \quad (3.41)$$

under forudsætning af, at  $P_1$ - $P_4$  antager 1989-værdierne. For at forkorte notationen lidt, indføres hjælpevariablerne  $P_{ij}$ , defineret som

$$P_{ij} = [P_i(1989)]^{-0.5} [P_j(1989)]^{0.5}. \quad (3.42)$$

Sammenhængen  $e_{14} = e_{34}$  kan så skrives som

$$\frac{\beta_{14}P_{14}}{\beta_{34}P_{34}} = \frac{\beta_{11}P_{11} + \beta_{12}P_{12} + \beta_{13}P_{13} + \beta_{14}P_{14} - \beta_{14}P_{14}}{\beta_{31}P_{31} + \beta_{32}P_{32} + \beta_{33}P_{33} + \beta_{34}P_{34} - \beta_{34}P_{34}}, \quad (3.43)$$

og for at sætte  $e_{24}$  lig  $e_{34}$  kræves følgende ligning overholdt:

$$\frac{\beta_{24}P_{24}}{\beta_{34}P_{34}} = \frac{\beta_{21}P_{21} + \beta_{22}P_{22} + \beta_{23}P_{23} + \beta_{24}P_{24} - \beta_{24}P_{24}}{\beta_{31}P_{31} + \beta_{32}P_{32} + \beta_{33}P_{33} + \beta_{34}P_{34} - \beta_{34}P_{34}}. \quad (3.44)$$

Idet  $\beta_{ij}$ 'erne (men ikke  $P_{ij}$ -erne) er symmetriske, giver (3.43) og (3.44):

$$\beta_{14} = \frac{1}{P_{14}} \beta_{34}P_{34} \frac{\beta_{11}P_{11} + \beta_{12}P_{12} + \beta_{13}P_{13}}{\beta_{13}P_{31} + \beta_{23}P_{32} + \beta_{33}P_{33}} \quad (3.45)$$

$$\beta_{24} = \frac{1}{P_{24}} \beta_{34}P_{34} \frac{\beta_{12}P_{21} + \beta_{22}P_{22} + \beta_{23}P_{23}}{\beta_{13}P_{31} + \beta_{23}P_{32} + \beta_{33}P_{33}}. \quad (3.46)$$

Sættes  $\beta_{34} = 0$  (hvorved  $\beta_{14}$  og  $\beta_{24}$  bliver lig nul), separeres materialerne helt ud, svarende til at  $e_{j4}$ ,  $e_{4j}$  og  $e_{44}$  alle er lig nul,  $j = 1, 2, 3$ . Alle elasticiteter i materiale-rækken og materiale-søjlen bliver altså lig nul, og  $M$  er således rent i-o-bestemt. Dette skriver vi med notationen  $((KEL)-M)$ , se evt. tabel K7 i bilag E side 143 for et eksempel.

### **$((KE)LM)$ -nestningsstruktur**

Udover at separere  $M$  ud i et yderste "nest", vil vi ofte også være interesserede i at separere  $L$  ud i et næstyderste nest, således at prisen på  $L$  ikke påvirker sammensætningen af  $K$  og  $E$ . Det gøres ved at sætte

$$e_{14} = e_{24} = e_{34} \quad \text{og} \quad e_{12} = e_{32}, \quad (3.47)$$

idet faktorpriserne antager 1989-værdierne. Matricen med elasticiteter kommer nu til at se ud som følger, idet de bundne elasticiteter som før er markeret med gråtoner.

**Tabel 3.4.** (((KE)L)M)-nestning

	$P_1 (P_K)$	$P_2 (P_L)$	$P_3 (P_E)$	$P_4 (P_M)$
$X_1 (K)$	-0.32	0.24	-0.06	0.15
$X_2 (L)$	0.06	-0.22	0.01	0.15
$X_3 (E)$	-0.26	0.24	-0.12	0.15
$X_4 (M)$	0.02	0.09	0.01	-0.12

For at finde parameterrestriktionerne skal vi løse (3.43) og (3.44) fra før, samt

$$\frac{\beta_{12}P_{12}}{\beta_{32}P_{32}} = \frac{\beta_{11}P_{11} + \beta_{12}P_{12} + \beta_{13}P_{13} + \beta_{14}P_{14}}{\beta_{31}P_{31} + \beta_{32}P_{32} + \beta_{33}P_{33} + \beta_{34}P_{34}} - \frac{\beta_{12}P_{12}}{\beta_{32}P_{32}}, \quad (3.48)$$

hvilket giver

$$\beta_{14} = \frac{1}{P_{14}} \beta_{34}P_{34} \frac{\beta_{11}P_{11} + \beta_{13}P_{13}}{\beta_{13}P_{31} + \beta_{33}P_{33}} \quad (3.49)$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{P_{12}} \beta_{23}P_{32} \frac{\beta_{11}P_{11} + \beta_{13}P_{13}}{\beta_{13}P_{31} + \beta_{33}P_{33}} \quad (3.50)$$

og

$$\beta_{24} = \frac{1}{P_{24}} \beta_{34}P_{34} \frac{\beta_{12}P_{21} + \beta_{22}P_{22} + \beta_{23}P_{23}}{\beta_{13}P_{31} + \beta_{23}P_{32} + \beta_{33}P_{33}}, \quad (3.51)$$

hvor  $\beta_{12}$  i (3.51) tages fra (3.50). Sættes  $\beta_{23}$  og  $\beta_{34} = 0$ , bliver materialerne og arbejdskraften separeret helt ud, svarende til at alle elasticiteter undtagen  $e_{11}$ ,  $e_{13}$ ,  $e_{31}$  og  $e_{33}$  er lig nul. Dette skriver vi med notationen (((KE)-L)-M), se evt. tabel K11 i bilag E side 144 for et eksempel.

**$((KL)E)M$ -nestningsstruktur**

$((KL)E)M$ -nestningen siger som før, at  $M$  er svagt separabel mht. de tre andre faktorer, men nu er det prisen på  $E$ , som ikke må påvirke forholdet mellem  $K$  og  $L$ , svarende til at  $e_{13} = e_{23}$ .

**Tabel 3.5.**  $((KL)E)M$ -nestning

	$P_1 (P_K)$	$P_2 (P_L)$	$P_3 (P_E)$	$P_4 (P_M)$
$X_1 (K)$	-0.27	0.06	-0.01	0.22
$X_2 (L)$	0.01	-0.22	-0.01	0.22
$X_3 (E)$	-0.02	-0.09	-0.10	0.22
$X_4 (M)$	0.03	0.14	0.01	-0.18

De heraf foranledigede parameterrestriktioner fås meget simpelt fra det foregående afsnit, fordi der af symmetri Grunde blot byttes om på alle 2-taller og 3-taller i (3.49)-(3.51).

 **$((K-E)L)M$ - og  $((K-E)L)-M$ -nestningsstrukturer**

Til sidst vil vi også få brug for at "binde"  $K$  og  $E$  sammen, således at forholdet mellem dem er uafhængigt af alle faktorpriser. Det svarer til, at  $K$  og  $E$  optræder i et helt fast forhold, eller om man vil, at substitutionselasticiteten  $\sigma$  er sat til nul i det inderste nest. Det foranlediger, at elasticiteterne i  $K$  og  $E$ -ligningerne bliver identiske, fx som følger:

**Tabel 3.6.**  $((K-E)L)M$ -nestning

	$P_1 (P_K)$	$P_2 (P_L)$	$P_3 (P_E)$	$P_4 (P_M)$
$X_1 (K)$	-0.27	0.22	-0.07	0.12
$X_2 (L)$	0.05	-0.19	0.01	0.12
$X_3 (E)$	-0.27	0.22	-0.07	0.12
$X_4 (M)$	0.02	0.08	0.00	-0.10

Den parameterrestriktion, som giver de viste elasticiteter, er tilsyneladende ikke helt let at regne ud, så i estimationerne i kapitel 7 har jeg blot prøvet mig frem med forskellige værdier af  $\beta_{33}$ , indtil  $K$ - og  $E$ -rækkerne blev ens.

#### 4. Tekniske fremskridt

Indtil videre er der ikke blevet talt om, hvordan teknologiske fremskridt (trends) tænkes bygget ind i de gennemgåede faktorefterspørgselsfunktioner. Det skyldes, at en nylig undersøgelse i modelgruppen på Danmarks Statistik har ført til det resultat, at man helt kan *glemme* de teknologiske fremskridt i den teoretiske diskussion af produktions- og omkostningsfunktioner, idet de uden videre lader sig bygge ind i funktionerne *bagefter*, hvis man går med til en ret uskyldig forenkende antagelse.<sup>19</sup>

*[Se her! Det skal her nævnes, at det i working paper 1998:2, kap. 6 (eller den tilsvarende, forbedrede Thomsen (2000), kap. 6) vises, at anvendelsen af faktorudvidende ikke-indbyggede effektivitetsindeks i produktion- eller omkostningsfunktioner ikke indebærer tab af fleksibilitet. -Thomas Thomsen, august 1999]*

Indtil videre har vi tænkt på produktionsfunktionen (her med fire produktionsfaktorer) som en funktion af typen

$$Y = F(X_1, X_2, X_3, X_4) . \quad (4.1)$$

Teknologiske fremskridt kan introduceres på mange måder, og mest generelt repræsenteres de ved tiden  $t$ , som på den måde kommer til at fungere som et indeks for den teknologiske udvikling. Vi kan altså skrive produktionsfunktionen op med tiden som et ekstra argument:

$$Y = G(X_1, X_2, X_3, X_4, t) . \quad (4.2)$$

Man kan opfatte det som at produktionsfunktionen (eller om man vil: isokvanterne) flytter sig med tiden. Typisk forestiller man sig, at isokvanterne rykker indad mod origo (= tekniske fremskridt), men der er dog intet principielt til hinder for at forestille sig tekniske *tilbageskridt*.

For at komme videre, har man ofte foretaget den yderst bekvemme forenkling, at de tekniske fremskridt knytter sig til de enkelte produktionsfaktorer og således gør disse mere effektive, men lader produktionsfunktionen  $F(\cdot)$  være uforandret:

$$Y = F(Z_1X_1, Z_2X_2, Z_3X_3, Z_4X_4) . \quad (4.3)$$

hvor  $Z_i = Z_i(t)$  er et tidsafhængigt indeks for effektiviteten, typisk normeret til at være lig én i et givet år. Funktionsformen for  $Z$  kunne fx formuleres som værende eksponentiel i tiden,  $Z_i = Z_i(t) = \exp(\omega_i t)$ , svarende til at produktionsfaktoren bliver  $100\omega\%$  mere effektiv pr. år. Disse faktorudvidende (eller -indskrænkende) tekniske

---

<sup>19</sup>Se evt. Hansen (1993).

fremskridt kaldes desuden "disembodied" (ikke-indbyggede), da de tilfalder alle årgange af produktionsfaktorer, uanset hvor gamle disse måtte være.

Det sidste er naturligvis problematisk, når vi taler om kapitalapparatet, men til en vis grad er der nok også tale om en overforsimpling, når vi taler om arbejdskraften. Hvad kapitalapparatet angår, skyldes problemet naturligvis det helt oplagte, at en gammel maskine med en forældet teknologi ikke uden videre drager nytte af en teknologisk landvinding (med mindre maskinen "opgraderes"). Denne tankegang – med "embodied" tekniske fremskridt – kræver imidlertid, at man holder styr på kapitalårgangene, og man taler derfor også om årgangsmodeller eller vintagemodeller. Med en sådan model kan man desuden modellere de fysiske afskrivninger mere adækvat, idet den giver mulighed for en endogen scrapning af økonomisk forældede årgange mm., men alt dette sker desværre på bekostning af et temmeligt omfattende modelapparat, som det falder uden for denne opgaves rammer at beskrive. Der henvises til fx Rasmussen (1991) for et eksempel på en årgangsmodel.

Vi holder os altså til vores disembodied tekniske fremskridt, og spørgsmålet er nu, hvad der sker med faktorefterspørgselsfunktionerne, når de nævnte effektivitetsindeks introduceres? Vi har været vant til, at minimering af omkostningerne

$$C = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 + P_4 X_4 , \quad (4.4)$$

under

$$Y = F(X_1, X_2, X_3, X_4) \quad (4.5)$$

gav faktorefterspørgselsfunktionerne

$$X_i^* = X_i(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) \quad (4.6)$$

og de partielle priselasticiteter

$$e_{ij} = \frac{dX_i(\cdot)}{dP_j} \frac{P_j}{X_i(\cdot)} = E_{ij}(P_1, P_2, P_3, P_4) . \quad (4.7)$$

Nu introduceres så effektivitetsindeksene,  $Z_i$ , idet det antages, at størrelsen af disse er kendt på forhånd. Vi skal stadig minimere omkostningerne,

$$C = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 + P_4 X_4 , \quad (4.8)$$

men nu under bibetingelsen

$$Y = F(Z_1 X_1, Z_2 X_2, Z_3 X_3, Z_4 X_4) . \quad (4.9)$$

Ved at omskrive omkostningsligningen en smule, ses det, at det fuldstændigt svarer til at minimere omkostningerne for de *effektivitetskorrigerede* faktorer ( $Z_i X_i$ ), blot til nogle anderledes priser:

$$(4.10)$$

$$C = \frac{P_1}{Z_1} (Z_1 X_1) + \frac{P_2}{Z_2} (Z_2 X_2) + \frac{P_3}{Z_3} (Z_3 X_3) + \frac{P_4}{Z_4} (Z_4 X_4) .$$

Disse priser,  $P_i/Z_i$ , kan vi passende kalde de *effektivitetskorrigerede* priser, og det ses, at faktorefterspørgselsfunktionerne (i effektivitetsenheder) ganske enkelt er givet ved:

$$Z_i X_i = X_1 \left( Y, \frac{P_1}{Z_1}, \frac{P_2}{Z_2}, \frac{P_3}{Z_3}, \frac{P_4}{Z_4} \right), \quad (4.11)$$

hvor  $X_i(\cdot)$ -funktionerne er præcis de samme som ovenfor i (4.6). Fra faktorefterspørgslen i effektive enheder kommer vi til faktorefterspørgslen i observerede enheder ved at dividere  $Z_i$  over:

$$X_i = \frac{1}{Z_i} X_1 \left( Y, \frac{P_1}{Z_1}, \frac{P_2}{Z_2}, \frac{P_3}{Z_3}, \frac{P_4}{Z_4} \right). \quad (4.12)$$

Ovenstående ligning angiver således, hvor relativt enkelt det er at introducere faktorudvidende tekniske fremskridt i sine faktorefterspørgselsfunktioner: I faktorefterspørgselsligning  $i$  uden trends dividerer man alle faktorpriser med deres respektive effektivitetsindeks og husker til sidst at dividere hele højresiden med effektivitetsindeks  $i$ .

Desuden kan man regne ud, at elasticiteterne nu er funktioner af de *effektive* priser, men ellers har præcis den samme funktionsform,  $E_{ij}(\cdot)$ , som før:

$$e_{ij} = E_{ij} \left( \frac{P_1}{Z_1}, \frac{P_2}{Z_2}, \frac{P_3}{Z_3}, \frac{P_4}{Z_4} \right). \quad (4.13)$$

Udover det meget rare ved, at man slipper for at løse minimeringsproblemet én gang til, er det behagelige ved sammenhængen i (4.12) også, at det giver mulighed for at introducere faktorudvidende fremskridt i faktorefterspørgselsfunktioner, hvor den bagvedliggende produktionsfunktion er meget uhåndterlig (fx nestet CES) eller decideret uopskrivelig (fx translog og i praksis også GLO).

Man kan fortolke disse faktorudvidende fremskridt som en ren omskalering af sine variabler. Hvis man fx på forhånd vidste, at arbejdskraften bliver 2% mere effektiv om året, kunne man blot multiplicere sin serie for arbejdskraften med  $\exp(0.02t)$ , hvis man samtidig huskede at dividere lønnen med  $\exp(0.02t)$ , således at man ikke har ændret ved omkostningerne til arbejdskraften. Herefter kunne man estimere sine parametre helt normalt på disse reskalerede data.

## 4.1 Den praktiske formulering af effektivitetstrendene

I praksis er det desværre sådan, at vi ikke har nogen forhåndsviden om, hvordan de enkelte effektivitetsindeks udvikler sig. Derfor vil vi i stedet foretrække at postulere en funktionsform for  $Z_i(\cdot)$  og så estimere parametrene i denne sammen med alle de andre parametre. I kapitel 7 om estimationer vil der således blive estimeret med effektivitetsindeks af formen

$$Z_i = \exp(\omega_i t + \bar{\omega}_i t^2) , \quad (4.14)$$

således at væksten (den relative ændring) i effektivitetsindekset er givet ved

$$R(Z_i) \approx \frac{d \log(Z_i)}{dt} = \omega_i + 2 \bar{\omega}_i t . \quad (4.15)$$

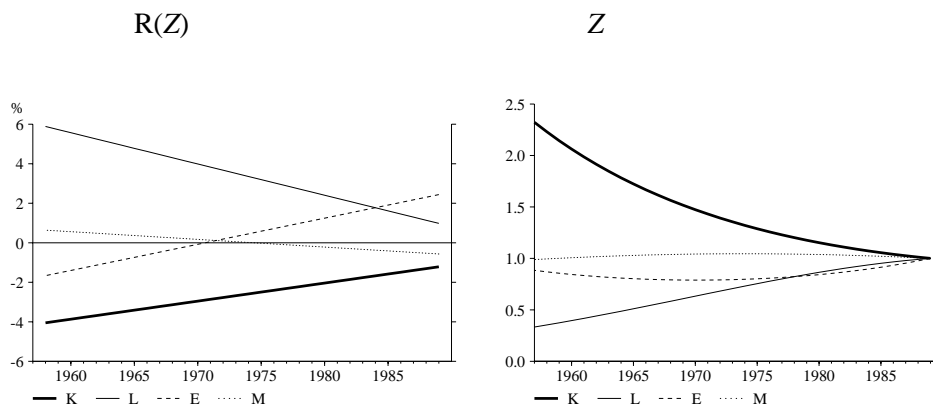
Formuleret med tiden i anden er vækstraten i  $Z_i$  ikke konstant over tid, og for at tage estimationerne i kapitel 7 lidt på forskud viser det sig, at man kan estimere følgende effektivitetsindeks for de fire produktionsfaktorer,  $K$ ,  $L$ ,  $E$  og  $M$  (se nedenfor).

Der er en kraftig (men aftagende) positiv trend i  $L$ 's effektivitetsindeks, mens der er en kraftig negativ (men også aftagende) trend i  $K$ 's effektivitetsindeks. Den her viste formulering af de tekniske fremskridt må siges at være ret fri, idet vi opererer med to trendparametre pr. ligning. Man kunne overveje at fjerne nogle af trendene, eller måske gøre vækstraterne "flade" (svarende til at slå  $t^2$  ihjel).<sup>20</sup>

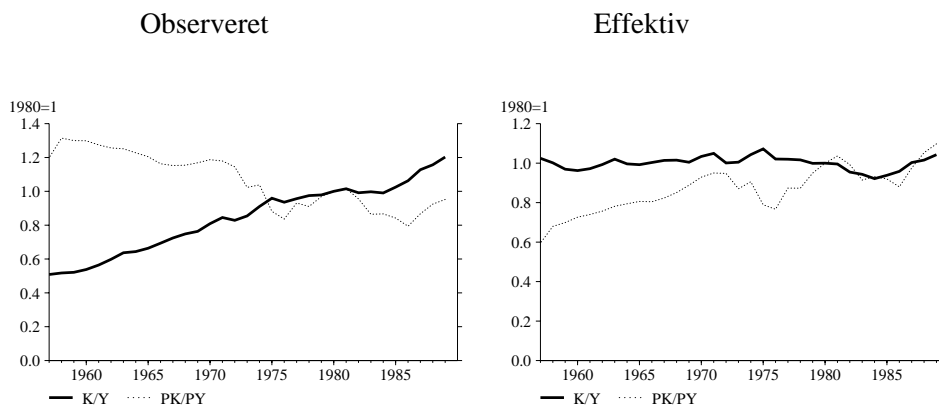
---

<sup>20</sup>Overraskende nok kan man vise, at den almindelige formulering af trends i translogfunktionen kan omskrives 100% til disse effektivitetstrends (der er tale om en ren omparametrisering), men der vil så gælde, at koefficienten til  $t^2$  er den samme i alle ligningerne, svarende til at alle kurverne i figur 4.1 (venstre) havde samme hældning. Se Hansen (1993) for en udledning af dette resultat. [Se her!: Faktisk kan man også introducere  $Y$  i effektivitetsindeksene og derved opnå en endnu mere overraskende korrespondance til translog-funktionen; se working paper 1998:2 kap. 6 eller den tilsvarende, forbedrede Thomsen (2000) kap. 6. -Thomas Thomsen, august 1999.]

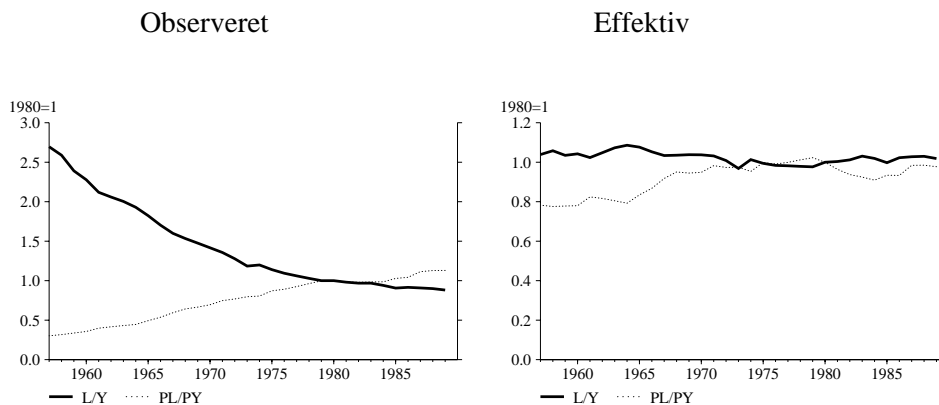


**Figur 4.1. Eksempel på effektivitetstrends**

Korrigerer vi  $K$  og  $L$  (og  $P_K$  og  $P_L$ ) for effektivitetsindeksene, får vi et noget andet forløb for mængder og priser, som illustreret i de følgende figurer (hvor produktionsfaktorerne er normeret med produktionen, og hvor priserne er normeret med prisen på denne):

**Figur 4.2.  $K/Y$ -forholdet og  $P_K/P_Y$ -forholdet, observerede størrelser og effektive størrelser**

**Figur 4.3.**  $L/Y$ -forholdet og  $PL/P_Y$ -forholdet, observerede størrelser og effektive størrelser



Det ses, at transformationen af data "drejer" priser og mængder på en måde, så det formentligt bliver noget lettere at estimere en fornuftig (egen)prisfølsomhed. Kapitalkvoten,  $K/Y$ , og beskæftigelseskvoten,  $L/Y$ , ses at være næsten konstante i effektive enheder.

## 4.2 Dekomponering af trendbidrag og fremskrivning af trends

Til sidst vil vi se på, hvordan udviklingen i de nævnte effektivitetstrends påvirker udviklingen i faktorerne selv. Det er man naturligvis meget interesseret i, idet det giver en idé om, i hvilken retning faktorforholdene "vrides", som følge af, at tiden går. Ofte er man interesseret i at vide, hvorvidt de tekniske fremskridt er *forbrugende* eller *besparende* for den enkelte produktionsfaktor, hvilket man ikke kan se ud fra effektivitetsindeksene selv (omend de giver en god indikation, jf. senere).

Umiddelbart kunne man måske tro, at en 1% forøgelse af en faktors effektivitet ville betyde at man blot brugte 1% mindre af den, men da den *effektive* pris på faktoren falder med 1%, vil der ske en vis substitution mellem faktorerne (fra faktoren selv over på de andre faktorer – givet at disse er substitutter). Eller formuleret mindre teknisk: Effektivitetsudviklingen gør det optimalt at bruge noget af effektivitetsfremgangen til også at spare på de andre faktorer. [Se her!: Se i øvrigt figur 8.4 side 117 i Poul Uffe Dam, red. (1996): *ADAM – en model af dansk økonomi*, marts 1995, Danmarks Statistik. -Thomas Thomsen, august 1999]

Effekterne er ret enkle at følge, for man tager blot ligning (4.12) side 49 og totaldiferentierer den logaritmisk. Det giver følgende enkle sammenhæng, som vist i Hansen (1993) og Thomsen (1994):

$$X = -Z + E(P - Z) + Y, \quad (4.16)$$

hvor

$X$  er en  $4 \times 1$  søjlevektor med vækstraten i de fire  $X$ 'er i observerede enheder,  
 $P$  er en  $4 \times 1$  søjlevektor med vækstraten i de fire  $P$ 'er i observerede enheder,  
 $Y$  er en  $4 \times 1$  søjlevektor med vækstraten i  $Y$  i alle elementerne,  
 $Z$  er en  $4 \times 1$  søjlevektor med vækstraten i de fire effektivitetsindeks og  
 $E$  er en  $4 \times 4$ -matrix med partielle priselasticiteter.

På venstresiden i (4.16) ser man vækstraten i observerede enheder. Det første led på højresiden er vækstraten i effektivitetsindekset med modsat fortegn (den umiddelbare effekt). I parentes på højresiden står så vækstraten i de *effektive* priser og disse ganges med matricen af priselasticiteter for at få substitutionseffekten på  $X$ 'erne af ændrede faktorpriser og trends. Til sidst lægges vækstraten i  $Y$  til som følge af antagelsen om konstant skalaafkast.

Der ses flere ting:

- Hvis  $Z$  er fyldt med lutter nuller (ingen trends overhovedet), bliver udviklingen i de observerede  $X$ 'er blot bestemt af  $Y$  tillagt den faktorsubstitution, udviklingen i de observerede  $P$ 'er måtte give.
- Hvis  $Y$  og de observerede  $P$ 'er holdes konstante, bliver udviklingen i de observerede  $X$ 'er bestemt som minus vækstraten i effektivitetsindeksene korrigeret for substitutionseffekter som følge af, at de effektive  $P$ 'er ændres.
- Hvis  $Y$  holdes konstant og væksten i de observerede priser sættes lig væksten i de respektive effektivitetsindeks, bliver væksten i de observerede  $X$ 'er blot lig væksten i effektivitetsindekset med modsat fortegn.

For at eksemplificere det, siger vi, at matricerne ser ud som følger (hvor væksten i  $Z_i$  og elasticiteterne er taget fra kapitel 7 (1989-værdier)):

$$Z = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.0 \\ 2.4 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -0.30 & 0.22 & -0.07 & 0.14 \\ 0.05 & -0.21 & 0.02 & 0.14 \\ -0.28 & 0.28 & -0.14 & 0.14 \\ 0.02 & 0.09 & 0.01 & -0.11 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

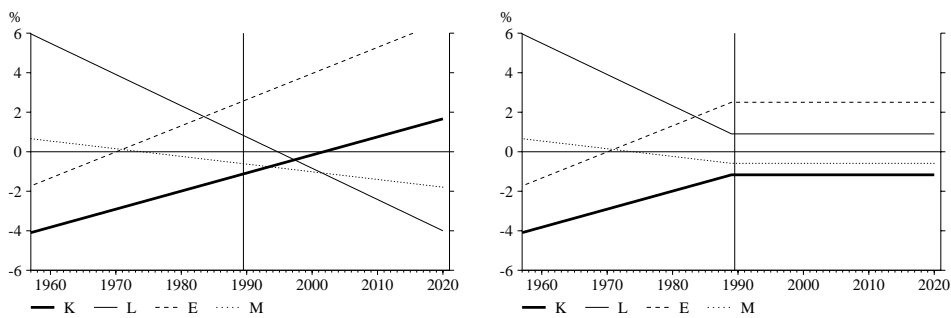
Idet  $P$  og  $Y$  sættes til nul, kan vi regne ud, hvad udviklingen i de observerede faktorniveauer bliver:

$$X = - \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.0 \\ 2.4 \\ -0.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.30 & 0.22 & -0.07 & 0.14 \\ 0.05 & -0.21 & 0.02 & 0.14 \\ -0.28 & 0.28 & -0.14 & 0.14 \\ 0.02 & 0.09 & 0.01 & -0.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.0 \\ -2.4 \\ -0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ -1.0 \\ -2.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.3 \\ -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \\ -2.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Efter det andet lighedstegn er bidragene fra trendene dekomponeret i den direkte effekt (effektivitetsvæksten med modsat fortegn) og "substitutionseffekten". Da priselasticiteterne er forholdsvis små, overdøver den direkte effekt substitutions-effekten for alle faktorerne, og udviklingen i de observerede faktorniveauer er således ikke milevidt fra at være lig effektivitetsudviklingen for den respektive faktor med modsat fortegn.

**Figur 4.4. Fremskrivning af trends: to muligheder**



Det er et kildent spørgsmål, hvorledes man i modelsammenhæng ville fremskrive disse effektivitetstrends. Lod man blot tiden gå uden videre, ville væksten i effektivitetsindeksene tage sig ud som i figur 4.4. (venstre), og dette må siges at være helt uantageligt. En oplagt mulighed ville være at gøre som i højre del af figuren, hvor udviklingen i  $Z'$ erne er kørt fladt frem. Hvorom alting er, er det vigtigt at huske på, at det i virkeligheden ikke er tiden, som er regressor, for tiden er blot stedfortræder for nogle tekniske frem- (eller tilbage-) -skridt, som har været der, men som vi ikke véd om varer ved.

## 5. Den dynamiske tilpasning mod langsigtligevægt

Under gennemgangen af de forskellige produktionsfunktioner har vi indtil videre ikke bekymret os videre for, hvordan den dynamiske tilpasningsproces kunne se ud. Vi har udelukkende koncentreret os om, hvordan de optimale/langsigtede faktorefterspørgselsligninger kunne se ud, men det er et solidt empirisk faktum, at estimerer man uden videre sine (langsigtede/optimale) faktorefterspørgsler uden nogen form for dynamisk tilpasning, vil man ende op med en helt uacceptabel systematik i residualerne – en systematik, som det for det meste lader sig gøre at beskrive (noget af) ved at tillade trægheder eller *dynamik* i processen.

Hvis man kun er interesseret i de meget langsigtede bevægelser i faktoranvendelsen og ikke interesserer sig synderligt for kortsigtsfænomener, kunne man nok fristes til at estimere sin model som rene langsigtssammenhænge. Men for det første *er* vi interesserede i de mere kortsigtede bevægelser i faktorniveauerne, og for det andet – og meget væsentligt – kan en undertrykkelse af enhver form for dynamik i processen give skævheder i de estimerede langsigtsparametre, fordi "det korte sigt" lidt populært sagt kan påvirke "det lange sigt".<sup>21</sup>

I kapitel 6 vil vi kigge mere detaljeret på, hvorfor der kunne være tale om trægheder i nogle af produktionsfaktorerne, men for nærværende kan vi blot tænke på det, som at det tager tid at investere i nyt kapitalapparat (eller afinstallere dette), således at kapitalapparatet på helt kort sigt er givet. Spørgsmålet er så, hvad denne træghed betyder for de resterende faktorer? Som nævnt i kapitel 2, må man formode, at de andre faktorer på en eller anden måde kompenserer for trægheden i kapitalapparatet. Øges afsætningen uventet med 1% (og tilfredsstilles denne efterspørgsel på keynesiansk vis), må mindst én af de andre produktionsfaktorer stige med *mere* end 1% for at kompensere for det på kort sigt for lille kapitalapparat. Falder produktionen uventet med 1%, kan man til gengæld bruge det "overflødige" kapitalapparat til at reducere forbruget af mindst én af de andre faktorer med *mere* end 1% (altsammen som sædvanligt under forudsætning om konstant skalaafkast).

Man kan tænke på det som, at én (eller flere) af produktionsfaktorerne på kort sigt er eksogent givet, således at omkostningsminimeringsproblemet må løses én gang til, *betingset* af, at den træge faktor i den enkelte periode er eksogen, dvs. givet på forhånd "udefra".

---

<sup>21</sup>Svarende til at der er for få observationer til, at Engle/Grangers totrinsestimationsprocedure giver gode estimater. Som vi skal se i kapitel 7, bliver vores elasticiteter omtrent halveret, hvis vi estimerer rene langsigtssammenhænge, og moralen af dette er så, at vi i den konkrete estimation er et stykke vej fra Engle/Grangers asymptotiske sætning om, at det ikke betyder noget, om man estimerer i ét eller to trin.

Tilsyneladende (men også kun tilsyneladende) gør det her en væsentlig forskel, om man opererer med produktions- eller omkostningsfunktioner:

- (1) Taler vi om *produktionsfunktioner*, er det i princippet enkelt nok at betinge på en produktionsfaktor: Man skriver blot minimeringsproblemet op igen, men lader nu den træge produktionsfaktor være eksogent givet. I praksis er det dog ofte meget besværligt, og for den nastede firefaktor CES-funktion med  $K$  træg i det inderste nest, findes der rent faktisk ikke nogen analytisk løsning på det nye minimeringsproblem, som det er vist i Rasmussen (1993b).
- (2) Givet at vi taler om *omkostningsfunktioner*, er vi tilsyneladende havnet i en blindgyde, fordi den bagvedliggende produktionsfunktion ikke kendes. Som vi skal se senere, er dette alligevel ikke et problem, men en måde at komme ud over det på har traditionelt været at formulere en såkaldt kortsigtsomkostningsfunktion, i hvilken den træge faktor optræder som selvstændigt argument på højresiden.

Det viser sig imidlertid, at teorien om rationering i forbrugssystemer i begge tilfælde giver en meget enkel måde at løse problemet på, så man hverken behøver at løse et nyt minimeringsproblem (produktionsfunktioner) eller omspecificere omkostningsfunktionen til en kortsigtsomkostningsfunktion (omkostningsfunktioner).

Med én træg faktor (fx  $X_1$ ) og 3 fleksible faktorer ( $X_2$ - $X_4$ ), tager man nemlig blot langsigtsligningen for den træge faktor og løser denne for faktorens egen pris,  $P_1$ . Dette udtryk for  $P_1$  indsættes i de 3 andre ligninger, og disse 3 nye ligninger giver så løsningen på det nye minimeringsproblem med  $X_1$  eksogent givet. I hver af disse 3 nye ligninger vil  $X_1$  således optræde, mens  $P_1$  til gengæld er forsvundet, og i det følgende vil vi vise dette yderst bekvemme resultat med én træg produktionsfaktor.<sup>22</sup>

## 5.1. Skyggepriser/virtuelle priser

Det nævnte resultat fra forbrugsteorien er kendt under betegnelsen "virtuelle" priser (introduceret af Rothbarth (1941)), hvilket vil sige følgende: Hvis en forbruger er rationeret i sit valg af en vare (vi siger, at han/hun ikke kan få så meget, som han/hun helst vil have), findes det nyttemaksimerende forbrug af de resterende varer ved kunstigt at hæve prisen på den rationerede vare, indtil forbrugeren lige netop efterspørger den mængde af den rationerede vare, som han/hun rent faktisk kan få.

---

<sup>22</sup>Hvis  $P_1$  ikke kan isoleres i ligningen for  $X_1$  (som det fx er tilfældet for nestet CES og translog), har vi naturligvis et problem. Så må man enten iterere sig frem eller benytte de i afsnit 5.2 beskrevne approksimationer.

I shall call the price system which makes the quantities actually consumed under rationing an optimum the "virtual price system".<sup>23</sup>

Denne kunstige prisforøgelse har naturligvis konsekvenser for efterspørgslen efter de ikke-rationerede varer (man vil efterspørge *mere* af mindst én af de ikke-rationerede varer, fordi pengene/budgettet jo forudsættes brugt<sup>24</sup>), men man kan selvfølgelig spørge sig selv, om denne sammensætning af de ikke-rationerede varer virkelig maksimerer forbrugerens nytte givet rationeringen?

I artiklen Neary/Roberts (1980) vises, at det rent faktisk er tilfældet. Resultatet vises også i det tilfælde, hvor forbrugeren over budgettet kompenseres for rationeringen (Hicks-efterspørgselsfunktioner – nytten holdes konstant), hvilket matematisk set er helt ækvivalent til producentens omkostningsminimeringsproblem, jf. evt. fodnote 18 side 38. Beviset i den nævnte artikel er imidlertid noget teknisk, så i stedet for at gengive dette, har jeg valgt at vise resultatet i firefaktortilfældet med én træg produktionsfaktor ved at differentiere produktionsfunktionen på helt normal vis, først med faktoren fleksibel (endogen) og derefter med faktoren givet på forhånd (træg/eksogen).

### Minimeringsproblem 1: Alle produktionsfaktorer fleksible/endogene

Vi skal som sædvanligt minimere omkostningerne,

$$C = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 + P_4 X_4 \quad (5.1)$$

givet produktionsfunktionen

$$Y = F(X_1, X_2, X_3, X_4) \quad (5.2)$$

Førsteordensbetingelserne for minimum er givet ved:

$$\frac{F'_1(\cdot)}{P_1} = \frac{F'_2(\cdot)}{P_2} = \frac{F'_3(\cdot)}{P_3} = \frac{F'_4(\cdot)}{P_4} \quad \text{og} \quad F(\cdot) = Y. \quad (5.3)$$

Der er nu fire ligninger til at bestemme de fire endogene,  $X_1$ - $X_4$ , med, og løsningen giver så de fire (langsigts)faktorefterspørgsler, hvor  $L_i(\cdot)$  står for "langt sigt":

$$X_1^* = L_1(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.4)$$

$$X_2^* = L_2(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.5)$$

---

<sup>23</sup>Rothbarth (1941), side 100.

<sup>24</sup>Idet vi regner opsparing for en ekstra (fremtidig) vare.

$$X_3^* = L_3(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.6)$$

$$X_4^* = L_4(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) . \quad (5.7)$$

### Minimeringsproblem 2: $X_1$ træg/eksogen; $X_2$ - $X_4$ fleksible/endogene

Hvis  $X_1$  er givet eksogent som  $\bar{X}_1$ , bliver problemet at minimere omkostningerne,

$$C = P_1\bar{X}_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 \quad (5.8)$$

givet produktionsfunktionen

$$Y = F(\bar{X}_1, X_2, X_3, X_4) . \quad (5.9)$$

Førsteordensbetingelserne er nu:

$$\frac{F_2'(\cdot)}{P_2} = \frac{F_3'(\cdot)}{P_3} = \frac{F_4'(\cdot)}{P_4} \quad \text{og} \quad F(\cdot) = Y . \quad (5.10)$$

De differentierede udtryk i ovenstående ligning er identisk de samme som før, idet en differentiation jo udtrykker effekten af at ændre en højresidevariabel, *givet* at de andre højresidevariabler holdes fast. Derfor er marginalprodukterne for faktor 2-4 naturligvis uafhængige af, om  $X_1$  er eksogen eller ej. Løsningen til (5.10) giver kortsigtsfaktorefterspørgslerne ( $K_i(\cdot)$  står for "kort sigt").

$$X_2 = K_2(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.11)$$

$$X_3 = K_3(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.12)$$

$$X_4 = K_4(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.13)$$

### Genvej til løsning af minimeringsproblem 2

Som sagt gøres alt dette meget enklere ved at tage langsigtsligningen for  $X_1$  og isolere  $P_1$  i denne:

$$X_1 = L_1(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) \quad \Leftrightarrow \quad P_1 = L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) . \quad (5.14)$$



Dette udtryk for  $P_1$  indsættes i alle ligningerne:

$$X_1 = L_1(Y, L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4), P_2, P_3, P_4) = X_1 \quad (5.15)$$

$$X_2 = L_2(Y, L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4), P_2, P_3, P_4) = M_2(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.16)$$

$$X_3 = L_3(Y, L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4), P_2, P_3, P_4) = M_3(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.17)$$

$$X_4 = L_4(Y, L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4), P_2, P_3, P_4) = M_4(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) . \quad (5.18)$$

Pointen er nu, at  $K(\cdot)$ - og  $M(\cdot)$ -funktionerne er identiske. Det forekommer måske ikke ligefrem indlysende, for tilsyneladende kan man kun sige, at  $K(\cdot)$ - og  $M(\cdot)$  i hvert fald har de samme argumenter. Men hvorfor skulle  $M(\cdot)$ -funktionerne og  $K(\cdot)$ -funktionerne være identiske?

Det følger imidlertid af at indsætte skyggeprisen,  $P_1 = L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4)$ , i langsigtsligningen for  $X_1$  selv. Hermed elimineres langsigtsligningen for den træge faktor (se (5.15)), således at vi står tilbage med et system med tre ligninger i stedet for fire, hvilket modsvares af, at én af ligningerne i førsteordensbetingelserne (5.3) også er blevet elimineret. Man kan tænke på det som, at man var blevet sat til at sy to stykker stof sammen. Uheldigvis kommer man til at sy et sting for meget, men i stedet for at begynde forfra med to nye stofstykker, stikker man i stedet nålen tilbage igennem det hul, den lige er kommet ud af og trækker til, hvorved den overflødige "binding" ophæves.

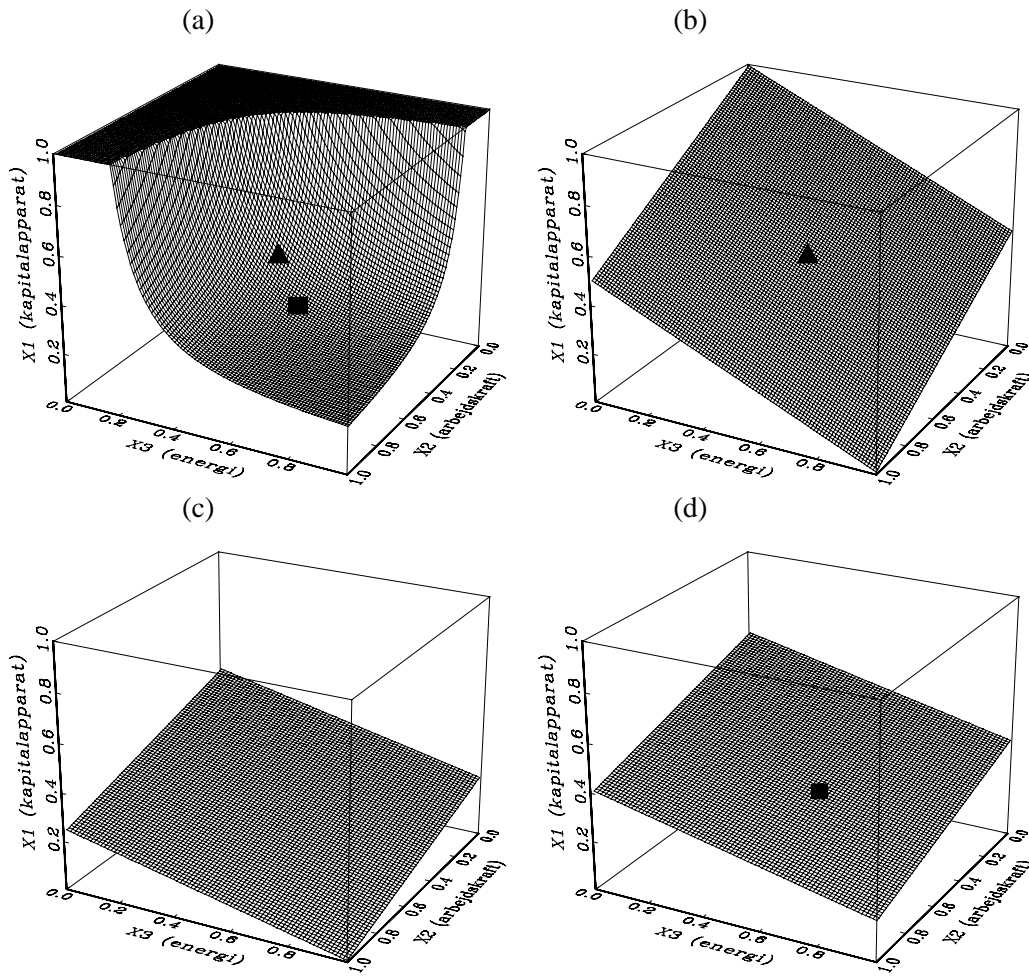
Resultatet kan uden videre generaliseres til  $n > 1$  træge/eksogene faktorer, idet man så skal løse de til de  $n$  træge faktorer hørende langsigtsligninger for de  $n$  faktorerers egenpriser og indsætte disse priser i de resterende ligninger. Dette generelle resultat kan ses i Neary/Roberts (1980), men beviset er som nævnt noget teknisk og knapt så intuitivt forståeligt. Se evt. også Deaton (1986) side 1823 for en kort beskrivelse af rationeringseffekter og skyggepriser.

### Grafisk illustration

I det følgende forsøges det at illustrere tankegangen vha. en tredimensionel isokvant, som vi allerede skulle være fortrolige med fra kapitel 3. Idet vi lader trekanten i figur 5.1 (a) være en udgangssituation *uden* rationering/mængderestriktioner, ville en tvungen formindskelse af  $K$  på 0.13 enheder flytte os fra trekanten til firkanten og således give et merforbrug af både  $L$  og  $E$  på 0.09 enheder. Men denne effekt svarer som nævnt til kunstigt at hæve prisen på  $K$  (konkret fordoble prisen),

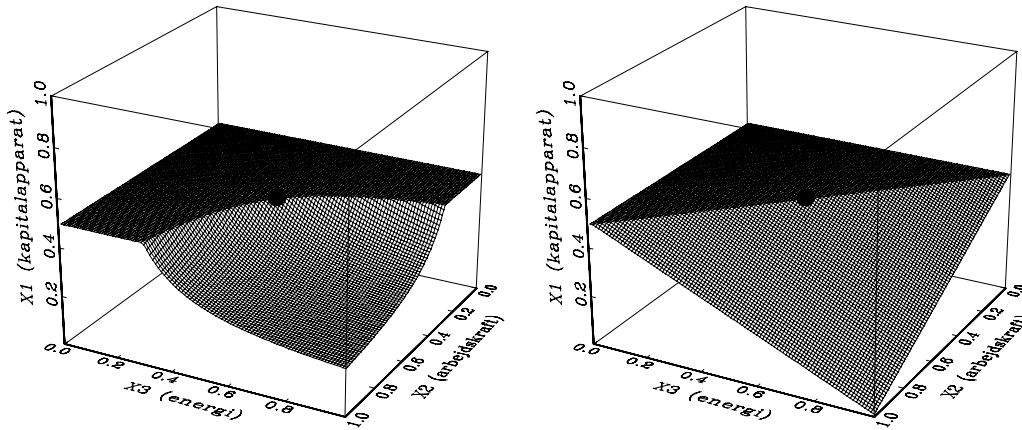
indtil vi lige netop får presset  $K$  0.13 enheder ned, og derfor kan rationeringseffekten illustreres med præcis denne samme figur, som vi så i kapitel 3.

**Figur 5.1.** Illustration af virkningen af at tvinge  $K$  ned med 0.13 enheder

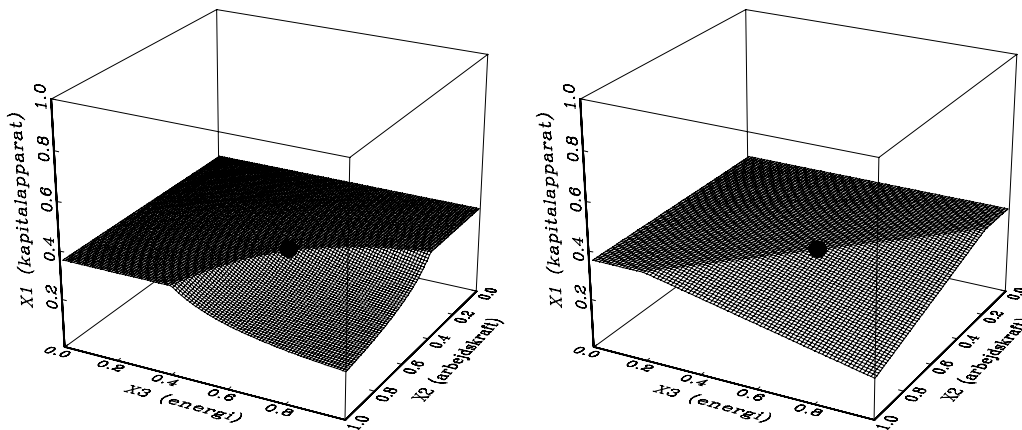


Hvis vi som vi har set tidligere skærer vandrette snit igennem isokvanten (og også igennem de til trekanten og firkanten hørende omkostningsplaner) får vi følgende figurer:

Figur 5.2. Initialsituation (▲)



Figur 5.3. Kapitalapparatet sænkes med 0.13 enheder (■)



Idet vi som før kigger på randen af de sorte områder (dvs. de todimensionelle isokvanter/omkostningskurver), ses det, at hældningen på de to todimensionelle omkostningskurver ikke forandres af, at  $P_K$  hæves, og det er præcis det, som er rationalet for, at skyggeprisen fungerer som den skal.

## 5.2. En approksimation af kortsigtseffekterne

Til sidst skal det vises, at man vha. en logaritmisk taylorapproksimation omkring de optimale niveauer kan få nogle meget nemme og nyttige formler frem. Dette er beskrevet i Thomsen (1993), som det efterfølgende bygger på. Med én træg faktor

( $X_1$ ) skal vi have vendt ligningen for det optimale  $X_1$  om, så  $P_1$  står på venstresiden, og dette udtryk indsættes så i de resterende ligninger (her kun vist for  $X_2$ ). Altså:

$$X_1 = L_1(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) \Leftrightarrow P_1 = L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.19)$$

$$X_2 = L_2(Y, P_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.20)$$

$$\Rightarrow X_2 = L_2(Y, L_1^{-1}(Y, X_1, P_2, P_3, P_4), P_2, P_3, P_4) = K_2(Y, X_1, P_2, P_3, P_4) \quad (5.21)$$

Vi skriver nu (5.19) og (5.20) i logaritmer og underforstår alle andre variabler end  $\log(P_1)$  i funktionerne  $l_1(\cdot)$  og  $l_2(\cdot)$ :

$$\log(X_1) = l_1(\log(P_1)) \Leftrightarrow \log(P_1) = l_1^{-1}(\log(X_1)) \quad (5.22)$$

$$\log(X_2) = l_2(\log(P_1)) \quad (5.23)$$

I (5.22) er  $\log(X_1)$  givet som funktion af  $\log(P_1)$ , således at  $\log(P_1)$  er givet implicit af  $\log(X_1)$ . Det giver følgende førsteordens taylorapproximation:

$$\log(P_1) - \log(P_1^*) = \frac{1}{l_1'(\log(P_1^*))} [\log(X_1) - \log(X_1^*)], \quad (5.24)$$

hvor  $P_1$  er skyggeprisen,  $P_1^*$  er prisen på  $X_1$  i udgangssituationen (ligevægt) og  $X_1^*$  er størrelsen af  $X_1$  i udgangssituationen. Da  $X_2$  ifølge (5.23) kan approksimeres ved

$$\log(X_2) - \log(X_2^*) = l_2'(\log(P_1^*)) [\log(P_1) - \log(P_1^*)], \quad (5.25)$$

indsætter vi (5.24) i (5.25) og får den simple

$$\log(X_2) - \log(X_2^*) = \frac{l_2'(\log(P_1^*))}{l_1'(\log(P_1^*))} [\log(X_1) - \log(X_1^*)] = \frac{e_{21}}{e_{11}} [\log(X_1) - \log(X_1^*)], \quad (5.26)$$

hvilket er hele ideen med at gå over i logaritmer.  $X_2$ 's afvigelse fra sit optimale niveau som følge af at  $X_1$  afviger fra sit optimale niveau er altså givet ud fra forholdet mellem de partielle (langsigtede) priselasticiteter,  $e_{21}/e_{11}$ . Fx giver  $e_{11} = -0.30$  og  $e_{21} = 0.05$ , at hvis  $X_1$  er 1% mindre end sit optimale niveau, vil det betyde, at  $X_2$  er  $0.05/(-0.30) \cdot (-1\%) = 0.17\%$  større end sit optimale niveau. Det samme regnestykke kan gentages for de andre faktorer, og der vil generelt gælde, at

$$\log(X_i) - \log(X_i^*) = \frac{e_{i1}}{e_{11}} [\log(X_1) - \log(X_1^*)] \quad (5.27)$$

Imidlertid vil vi gerne generalisere (5.27) på to punkter. For det første vil vi udvide (5.27) med et andenordensled, idet det viser sig at være nødvendigt, hvis man vil bruge sammenhængen til at sige noget om virksomhedernes kortsigtede marginalomkostninger. Og for det andet vil vi generalisere (5.27) til to træge faktorer, idet vi i estimationsforsøgene vil forsøge også at gøre arbejdskraften træg på kort sigt.

### To træge faktorer

Det er let at vise, at vi nu skal løse to ligninger mht. to skyggepriser,  $P_1$  og  $P_2$ .

$$\log(X_1) - \log(X_1^*) = e_{11} [\log(P_1) - \log(P_1^*)] + e_{12} [\log(P_2) - \log(P_2^*)] \quad (5.28)$$

$$\log(X_2) - \log(X_2^*) = e_{21} [\log(P_1) - \log(P_1^*)] + e_{22} [\log(P_2) - \log(P_2^*)]. \quad (5.29)$$

Når disse ligninger er løst for  $P_1$  og  $P_2$ , indsættes disse skyggepriser i de to resterende faktorligninger:

$$\log(X_3) - \log(X_3^*) = e_{31} [\log(P_1) - \log(P_1^*)] + e_{32} [\log(P_2) - \log(P_2^*)] \quad (5.30)$$

$$\log(X_4) - \log(X_4^*) = e_{41} [\log(P_1) - \log(P_1^*)] + e_{42} [\log(P_2) - \log(P_2^*)]. \quad (5.31)$$

Det giver følgende ligninger for  $X_3$  og  $X_4$ :

$$\begin{aligned} \log(X_3) - \log(X_3^*) &= \\ &= \frac{e_{31}e_{22} - e_{32}e_{21}}{e_{11}e_{22} - e_{21}e_{12}} [\log(X_1) - \log(X_1^*)] + \frac{e_{32}e_{11} - e_{31}e_{12}}{e_{11}e_{22} - e_{21}e_{12}} [\log(X_2) - \log(X_2^*)] \end{aligned} \quad (5.32)$$

og

$$\begin{aligned} \log(X_4) - \log(X_4^*) &= \\ &= \frac{e_{41}e_{22} - e_{42}e_{21}}{e_{11}e_{22} - e_{21}e_{12}} [\log(X_1) - \log(X_1^*)] + \frac{e_{42}e_{11} - e_{41}e_{12}}{e_{11}e_{22} - e_{21}e_{12}} [\log(X_2) - \log(X_2^*)] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Man kan ikke uden videre sige noget om nævnernes fortegn, men det vil normalt være positivt og er det altid, hvis egenpriselasticiteterne alle er negative og kryds-

priselasticiteterne alle er positive (dvs. at alle faktorer er hinandens substitutter)<sup>25</sup>. Hvad udtrykkene i tællerne angår, vil de under "fuldkommen substitution" være negative, i hvilket tilfælde, vi så ikke overraskende får, at en formindskelse af én eller begge af de to træge faktorer giver et større (kompenserende) forbrug af begge de to fleksible faktorer.

### En andenordens approksimation med én træg faktor

*[Se her!:* Dette afsnit er udgået i nærværende udgave, da forfatteren i 1994 ikke vidste, at de kortsigtede marginalomkostninger kan fås ved at indsætte skyggeprisen( $r$ )n( $e$ ) i ligningen for de langsigtede marginalomkostninger, jf. working paper 1998:2 appendix A. -Thomas Thomsen, august 1999]

## 5.3. Sammenligning af kortsigtsomkostningsfunktioner

For at få lidt føling med alt dette, vil det nok være formålstjenligt at se på, hvordan tingene ser ud i tilfældet med kun to produktionsfaktorer.

### 5.3.1. GLO-kortsigtsgligninger udledt vha. langsigtsligninger

Som i afsnit 3.1.2. side 27 har vi GLO-faktorefterspørgslerne givet som

$$X_1^* = Y \left[ \beta_{11} + \beta_{12} P_2^{0.5} P_1^{-0.5} \right] \quad (5.38)$$

$$X_2^* = Y \left[ \beta_{22} + \beta_{12} P_1^{0.5} P_2^{-0.5} \right] \quad (5.39)$$

$P_1$  isoleres fra (5.38) og indsættes i (5.39):

$$X_2 = Y \left[ \beta_{22} + \beta_{12} \frac{\beta_{12} P_2^{0.5}}{X_1/Y - \beta_{11}} P_2^{-0.5} \right] = Y \left[ \beta_{22} + \frac{\beta_{12}^2}{X_1/Y - \beta_{11}} \right] \quad (5.40)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{X_1}{Y} - \beta_{11} \right) \left( \frac{X_2}{Y} - \beta_{22} \right) = \beta_{12}^2 \quad (5.41)$$

Ligning (5.40) er sammenhængen mellem  $X_1$ ,  $X_2$  og  $Y$ ; dvs. rent faktisk har vi den til GLO-omkostningsfunktionen svarende produktionsfunktion, som vi udledte vha.

---

<sup>25</sup>Så er  $-e_{11} > e_{12}$  og  $-e_{22} > e_{21}$ , idet  $e$ -erne summer til nul rækkevis.

et lidt andet ræsonnement i afsnit 3.1.2. Produktionen  $Y$  er således givet som løsningen på

$$(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2) Y^2 - (\beta_{11}X_2+\beta_{22}X_1) Y + X_1X_2 = 0 , \quad (5.42)$$

og med  $n$  produktionsfaktorer er den bagvedliggende GLO-produktionsfunktion generelt givet som løsningen til en  $n$ -te-gradsligning, hvorfor det siger sig selv, at den bagvedliggende GLO-produktionsfunktion ikke er behagelig at arbejde med.<sup>26</sup>

### 5.3.2. GLO-kortsigtsomkostningsfunktionen

Den sædvanlige måde at gøre en af faktorerne træg på er at fjerne  $P_1$  fra omkostningsfunktionen og til gengæld introducere  $X_1$ , hvorved vi får en såkaldt kortsigtsomkostningsfunktion (på engelsk: "restricted cost function"). Med kun én fleksibel faktor er de variable omkostninger udelukkende omkostninger ved denne fleksible faktor, og funktionsformen for  $VC$  (variable omkostninger) i GLO-tilfældet er typisk (se fx Morrison (1986) eller From (1994)):

$$VC = Y \left[ \beta_{22}P_2 + \beta_2P_2 \left( \frac{X_1}{Y} \right)^{0.5} + \beta P_2 \frac{X_1}{Y} \right] \Leftrightarrow X_2 = Y \left[ \beta_{22} + \beta_2 \left( \frac{X_1}{Y} \right)^{0.5} + \beta \frac{X_1}{Y} \right] \quad (5.43)$$

Denne ligning for  $VC$  har i formen nogen lighed med den almindelige GLO-omkostningsfunktion, som vi så i afsnit 3.1.2, men som vi skal se, ændres isokvanternes udseende radikalt af dette. De variable omkostninger er her kun udgifter til  $X_2$ , og den optimale indsats af  $X_1$  fås som løsningen til følgende optimalitetsbetingelse:

$$\frac{dVC}{dX_1} = 0.5 \beta_2 P_2 Y^{0.5} X_1^{-0.5} + \beta P_2 = -P_1 , \quad (5.44)$$

som fortolkes som, at indsatsen af  $X_1$  øges præcis indtil besparelsen i  $VC$  ved at øge  $X_1$  med én enhed lige netop er lig prisen på  $X_1$ . Det giver følgende optimale faktorniveauer:

$$X_1^* = Y \left[ \frac{-0.5 \beta_2 P_2}{P_1 + \beta P_2} \right]^2 \quad (5.45)$$

---

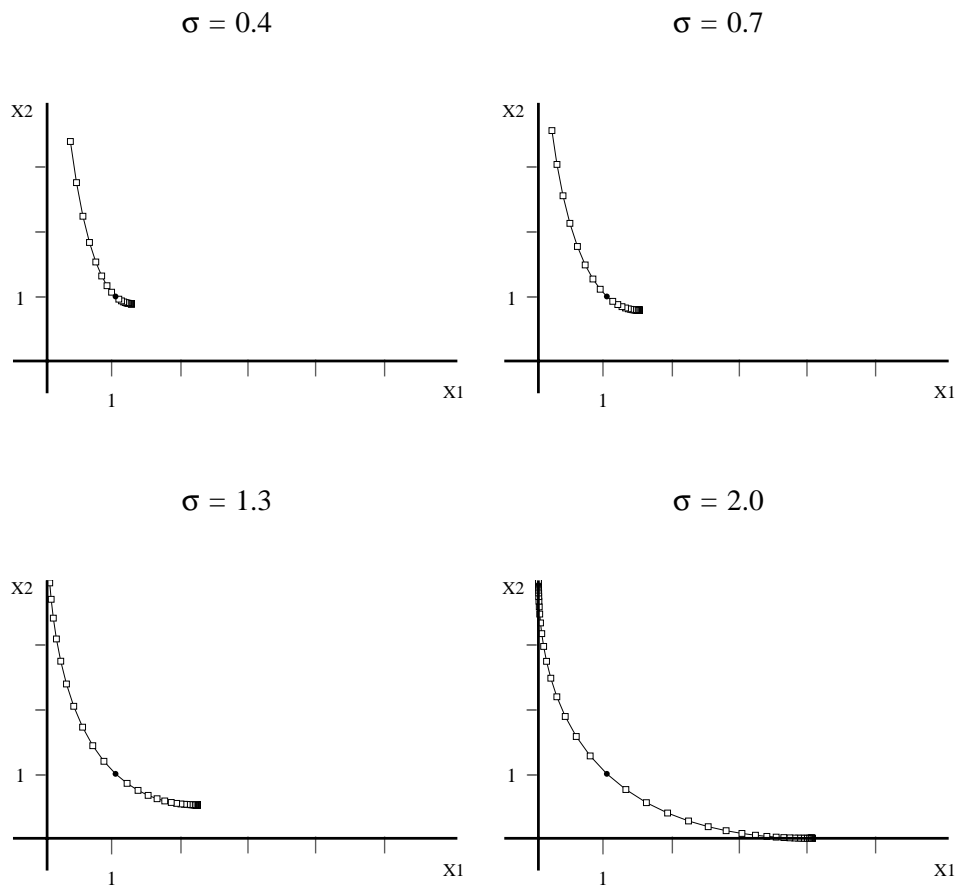
<sup>26</sup>Med  $n$  produktionsfaktorer finder man den bagvedliggende produktionsfunktion på følgende måde: Man tager de  $n-1$  første ligninger og løser dem for de  $n-1$  første faktorpriser. Alle disse  $n-1$  skyggepriser indsættes så i den sidste ligning (ligning  $n$ ), og som følge af, at omkostningsfunktionen er homogen af første grad i priserne, forsvinder den  $n$ -te faktorpris dermed ud af den sidste ligning. Tilbage står en sammenhæng mellem produktionen og alle produktionsfaktorerne; dvs. produktionsfunktionen.

$$X_2^* = Y \left[ \beta_{22} + \beta_2 \left( \frac{X_1^*}{Y} \right)^{0.5} + \beta \frac{X_1^*}{Y} \right] = Y \left[ \beta_{22} + \beta_2 \frac{-0.5 \beta_2 P_2}{P_1 + \beta P_2} + \beta \left( \frac{-0.5 \beta_2 P_2}{P_1 + \beta P_2} \right)^2 \right].$$

(5.46)

Disse optimale faktorefterspørgselsligninger kan vi så tegne op, idet vi som i kapitel 3 ændrer på de relative priser for at få tegnet isokvanten op og tvinger denne til at have en given krumning i punktet (1, 1).

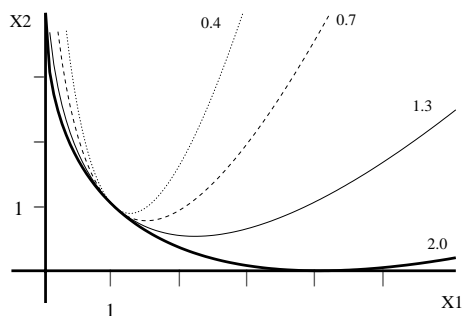
**Figur 5.4. Isokvanter for kortsigts-GLO-funktionen (smlgn. figur 3.9 side 29)**



Isokvanternes udseende følger af, at sammenhængen (5.43) ser ud som følger for de forskellige  $\sigma$ 'er:



**Figur 5.5. Sammenhængen mellem  $X_1$  og  $X_2$  for forskellige  $\sigma$ , jf. ligning (5.43)**



Det ses tydeligt, at denne kortsigts-GLO-funktion giver anledning til en fundamental asymmetri i de optimale/langsigtede ligninger. Ganske vist *er* denne funktion fuldt fleksibel i et givet punkt, men isokvanterne ligner ikke de tidligere viste GLO-isokvanter ret meget, og man må derfor sige, at der i realiteten er tale om et fundamentalt skift i funktionsform.

Da isokvanterne bøjer opad for tilstrækkeligt store værdier af  $X_1$ , betyder det, at når  $P_1$  bliver tilstrækkeligt lille (eller  $P_2$  tilstrækkeligt stor), går "processen" i stå, således at hverken  $X_1$  eller  $X_2$  flytter sig (hverken absolut eller procentvist). Dette ser specielt slemt ud for små  $\sigma$ , og derfor må man sige, at GLO-kortsigtsomkostningsfunktionen *ikke* er velegnet (og i realiteten er uegnet), hvis der er tale om beskeden substitution.

### 5.3.3. Translog-kortsigtsomkostningsfunktionen

På samme måde som tilfældet er med GLO, har der ofte været opereret med en translog-kortsigtsomkostningsfunktion, i hvilken den træge faktor optræder som selvstændigt argument på højresiden (se fx Rasmussen (1993a) eller Walfridson (1987)). Den ser typisk ud som følger:

$$\begin{aligned} \log(VC) = & \alpha_0 + \alpha_2 \log(P_2) + \alpha_x \log(X_1) + \alpha_y \log(Y) \\ & + 0.5 \alpha_{22} (\log(P_2))^2 + 0.5 \alpha_{xx} (\log(X_1))^2 + 0.5 \alpha_{yy} (\log(Y))^2 \\ & + \alpha_{x2} \log(X_1) \log(P_2) + \alpha_{y2} \log(Y) \log(P_2) + \alpha_{xy} \log(X_1) \log(Y) \end{aligned} \quad (5.47)$$

I formen har denne funktion samme struktur som den tidligere viste translogomkostningsfunktion, idet der stadig er tale om en andenordens logaritmisk Taylorapproximation. Her er hele ti parametre, men pålæggelse af prishomogenitet og konstant

skalaafkast reducerer dem til kun tre, idet man kan overbevise sig om, at følgende skal være opfyldt:<sup>27</sup>

*Prishomogenitet:* De variable omkostninger stiger med én procent, når prisen på alle de variable produktionsfaktorer (her kun én) stiger med én procent.

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 1 \\ \alpha_{22} &= 0 \\ \alpha_{x2} &= 0 \\ \alpha_{y2} &= 0\end{aligned}$$

*Konstant skalaafkast på langt sigt:* Når  $X_1$  og  $Y$  begge stiger med én procent, stiger de variable omkostninger (og dermed altså også de totale omkostninger) med én procent.

$$\begin{aligned}\alpha_x + \alpha_y &= 1 \\ \alpha_{xx} + \alpha_{xy} &= 0 \\ \alpha_{yy} + \alpha_{xy} &= 0\end{aligned}$$

Tilbage bliver en ligning for  $VC$  med tre parametre:

$$\begin{aligned}\log(VC) &= \alpha_0 + \log(P_2) + \alpha \log(X_1) + (1-\alpha) \log(Y) \\ &\quad - 0.5 \alpha_1 (\log(X_1))^2 - 0.5 \alpha_1 (\log(Y))^2 + \alpha_1 \log(X_1) \log(Y) ,\end{aligned}\tag{5.48}$$

idet vi har udskiftet  $\alpha_x$  med  $\alpha$  og  $\alpha_{xy}$  med  $\alpha_1$ . Ligningen lader sig skrive simple som:

$$\begin{aligned}\log(VC) &= \alpha_0 + \log(P_2) + \alpha (\log(X_1) - \log(Y)) + \log(Y) \\ &\quad - 0.5 \alpha_1 (\log(X_1) - \log(Y))^2 .\end{aligned}\tag{5.49}$$

Idet  $X_2 = VC/P_2$  (de variable omkostninger udgøres kun af udgifter til  $X_2$ ), kan vi udtrykke  $X_2$  som

$$\log\left(\frac{X_2}{Y}\right) = \alpha_0 + \alpha \log\left(\frac{X_1}{Y}\right) - 0.5 \alpha_1 \left[\log\left(\frac{X_1}{Y}\right)\right]^2\tag{5.50}$$

Dette udtryk beskriver således isokvanterne for translog-kortsigtsomkostningsfunktionen, og det ses at være parabler, hvis de indtegnes på dobbeltlogaritmisk papir. Det optimale niveau for  $X_1$  findes som for GLO-kortsigtsomkostningsfunktionen vha. betingelsen  $dVC/dX_1 = -P_1$ :

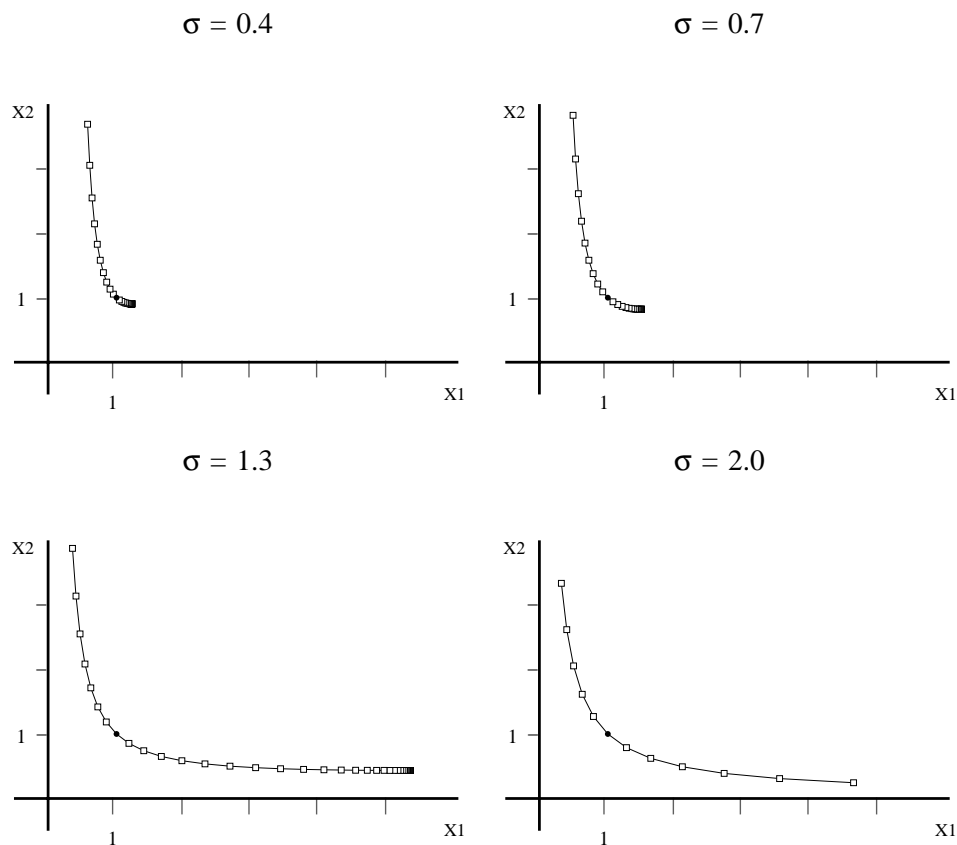
---

<sup>27</sup>Jf. fx Rasmussen (1993a) side 13-14 eller Walfridson (1987) side 95.

$$\frac{dVC}{dX_1} = \frac{d\log(VC)}{d\log(X_1)} \frac{VC}{X_1} = \left[ \alpha - \alpha_1 \log\left(\frac{X_1}{Y}\right) \right] \frac{\exp(\log(VC))}{X_1} = -P_1, \quad (5.51)$$

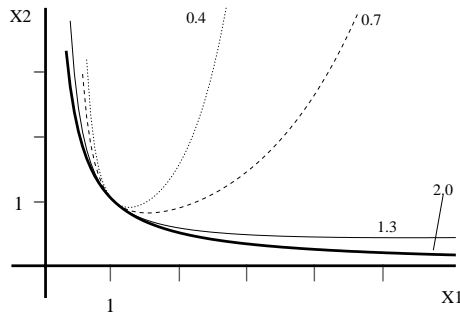
hvor  $\log(VC)$  tages fra (5.49). Denne ligning kan desværre ikke løses analytisk for  $X_1$ , så i stedet må man iterere sig frem. Ved at eksperimentere med parameterværdierne, kan man gentage de sædvanlige isokvantgrafer, også for translog-kortsigtsomkostningsfunktionen:

**Figur 5.6. Isokvanter for translog-kortsigtsomkostningsfunktionen (smlgn. figur 3.10. side 31)**



Som ovenfor for kortsigts-GLO-funktionen, kan vi tegne sammenhængen mellem  $X_1$  og  $X_2$  op vha. (5.50):

**Figur 5.7.** Sammenhængen mellem  $X_1$  og  $X_2$  for forskellige  $\sigma$ , jf. figur 5.6.



Af figur 5.7 ses det, at translog-kortsigtsomkostningsfunktionen lider af en lignende fundamental asymmetri som GLO-kortsigtsomkostningsfunktionen (se evt. kommentarerne til denne, side 67).

## 5.4. GLO-kortsigtsligninger i firefaktortilfældet

Konklusionen på afsnit 5.3.2 og 5.3.3 må være, at man bør være varsom med at arbejde med de nævnte kortsigtsomkostningsfunktioner, hvis der er tale om beskeden faktorsubstitution. Hertil kommer, at de kortsigtede GLO-ligninger udledt vha. skyggepriser fra langsigtssligningerne er meget simple at arbejde med, og det vælges derfor at fortsætte med disse i det følgende.

### 5.4.1. Firefaktor GLO med én træg produktionsfaktor

Hvis man vil betinge på  $X_1$ , udregnes  $P_1$  fra ligning (3.35) side 42:

$$P_1 = \left[ \frac{\beta_{12}P_2^{0.5} + \beta_{13}P_3^{0.5} + \beta_{14}P_{14}^{0.5}}{X_1/Y - \beta_{11}} \right]^2 \quad (5.52)$$

og indsættes i ligningerne for de tre resterende produktionsfaktorer:

$$X_2 = Y \left[ \beta_{22} + \left( \beta_{12} \frac{\beta_{12} P_2^{0.5} + \beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_{14}^{0.5}}{X_1/Y - \beta_{11}} + \beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5} \right) P_2^{-0.5} \right] \quad (5.53)$$

$$X_3 = Y \left[ \beta_{33} + \left( \beta_{13} \frac{\beta_{12} P_2^{0.5} + \beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_{14}^{0.5}}{X_1/Y - \beta_{11}} + \beta_{23} P_2^{0.5} + \beta_{34} P_4^{0.5} \right) P_3^{-0.5} \right] \quad (5.54)$$

$$X_4 = Y \left[ \beta_{44} + \left( \beta_{14} \frac{\beta_{12} P_2^{0.5} + \beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_{14}^{0.5}}{X_1/Y - \beta_{11}} + \beta_{24} P_2^{0.5} + \beta_{34} P_3^{0.5} \right) P_4^{-0.5} \right]. \quad (5.55)$$

Hermed har vi vores kortsigtsfaktorefterspørgselsfunktioner for  $X_2$ - $X_4$ , og der vil gælde, at  $X_i = X_i^*$ , hvis  $X_1 = X_1^*$ . Senere vil vi få brug for at betinge på to produktionsfaktorer ( $X_1$  og  $X_2$ ), og efter som GLO-ligningerne er lineære i (kvadratrødderne af) priserne, vil man altid kunne finde løsningen til et system med  $k$  træge faktorer ved at løse  $k$  ligninger mht.  $k$  ubekendte skyggepriser og bagefter indsætte disse i de resterende ligninger.<sup>28</sup>

#### 5.4.2. Firefaktor GLO med to træge produktionsfaktorer

Vi skal løse de to følgende ligninger for  $P_1$  og  $P_2$ :

$$X_1 = Y \left[ \beta_{11} + \left( \beta_{12} P_2^{0.5} + \beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_4^{0.5} \right) P_1^{-0.5} \right] \quad (5.56)$$

$$X_2 = Y \left[ \beta_{22} + \left( \beta_{12} P_1^{0.5} + \beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5} \right) P_2^{-0.5} \right]. \quad (5.57)$$

Det giver

$$P_1 = \left[ \frac{\beta_{12} (\beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) + (\beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_4^{0.5}) [X_2/Y - \beta_{22}]}{[X_1/Y - \beta_{11}] [X_2/Y - \beta_{22}] - \beta_{12}^2} \right]^2 \quad (5.58)$$

og

$$P_2 = \left[ \frac{\beta_{12} (\beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_4^{0.5}) + (\beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) [X_1/Y - \beta_{11}]}{[X_1/Y - \beta_{11}] [X_2/Y - \beta_{22}] - \beta_{12}^2} \right]^2. \quad (5.59)$$

---

<sup>28</sup>At ligningerne er lineære i kvadratroden af priserne indses ved i langsigtsligningen for  $X_i^*$  at gange  $P_i^{-0.5}$  over på venstresiden; se (3.35)-(3.38) side 42.

Disse to priser indsættes i langsigtefterspørgselsfunktionerne for  $X_3$  og  $X_4$ :

$$X_3 = Y \left[ \beta_{33} + \left( \frac{\text{tæller}}{[X_1/Y - \beta_{11}][X_2/Y - \beta_{22}] - \beta_{12}^2} + \beta_{34}P_4^{0.5} \right) P_3^{-0.5} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{tæller} = & \beta_{23}\beta_{12} (\beta_{13}P_3^{0.5} + \beta_{24}P_4^{0.5}) + \beta_{23} (\beta_{23}P_3^{0.5} + \beta_{24}P_4^{0.5}) [X_1/Y - \beta_{11}] \\ & + \beta_{13}\beta_{12} (\beta_{23}P_3^{0.5} + \beta_{24}P_4^{0.5}) + \beta_{13} (\beta_{13}P_3^{0.5} + \beta_{14}P_4^{0.5}) [X_2/Y - \beta_{22}] \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$X_4 = Y \left[ \beta_{44} + \left( \frac{\text{tæller}}{[X_1/Y - \beta_{11}][X_2/Y - \beta_{22}] - \beta_{12}^2} + \beta_{34}P_3^{0.5} \right) P_4^{-0.5} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{tæller} = & \beta_{24}\beta_{12} (\beta_{13}P_3^{0.5} + \beta_{24}P_4^{0.5}) + \beta_{24} (\beta_{23}P_3^{0.5} + \beta_{24}P_4^{0.5}) [X_1/Y - \beta_{11}] \\ & + \beta_{14}\beta_{12} (\beta_{23}P_3^{0.5} + \beta_{24}P_4^{0.5}) + \beta_{14} (\beta_{13}P_3^{0.5} + \beta_{14}P_4^{0.5}) [X_2/Y - \beta_{22}] \end{aligned} \quad (5.61)$$

## 6. Forventningsdannelse og tilpasningsomkostninger

I kapitel 5 har vi udelukkende set på, hvad der sker med de fleksible faktorer, *givet* at de træge faktorer antager et udefra givet niveau. Vi har talt om trægheder i kapitalapparatet, men vi har endnu ikke talt om, *hvorfor* der kunne tænkes at være sådanne trægheder, og vigtigere: *hvordan* de fungerer. Det vil vi forsøge at råde bod på i det følgende, hvor vi simplificerende antager, at der kun er én træg faktor, som vi opfatter som kapitalapparatet.

Standardforklaringen på, at der skulle være trægheder i kapitalapparatet er, at der er omkostninger forbundet med at installere eller afinstallere dette.<sup>29</sup> Således giver *ændringen* i kapitalapparatet et positivt bidrag til de samlede omkostninger, uanset om denne ændring er positiv eller negativ. Vi får på den måde et trade-off mellem virksomhedens ønske om, at  $K$  er så tæt som muligt på det omkostningsminimerende  $K (K^*)$ , samtidig med, at bevægelsen i retning af dette optimale kapitalapparat er forbundet med omkostninger.

I litteraturen operationaliseres denne tankegang typisk på én af to måder:

- (1) *Interne tilpasningsomkostninger*: Den numeriske ændring i  $K$  indgår som en ekstra "kontraproduktiv" produktionsfaktor i selve produktionsfunktionen (og dermed også i omkostningsfunktionen).
- (2) *Eksterne tilpasningsomkostninger*: De samlede omkostninger tillægges "uden om" omkostningsfunktionen nogle omkostninger ved at tilpasse kapitalapparatet, fx givet kvadratisk som  $\gamma_2(D(K))^2$ .

Rationalet i (1) er, at ændringer i  $K$  bidrager *negativt* til produktionen, forstået på den måde, at en ændring i  $K$  for givet  $Y$  vil kræve en ekstra indsats af én eller flere af de andre produktionsfaktorer – uanset fortegnet på  $D(K)$ . At lade  $|D(K)|$  indgå direkte ind i produktionsfunktionen giver således *i princippet* mulighed for at vurdere, hvordan installation/nedtagning af  $K$  spiller sammen med de andre produktionsfaktorer, og om det fx er medarbejderne,  $L$ , som sørger for at (af)installere kapitalapparatet, eller om det måske er materialeforbruget,  $M$ , som stiger, forstået som køb af serviceydelser hos leverandøren.

Da det imidlertid ikke er rart at skulle til at operere med en ekstra "produktionsfaktor", vil vi i det følgende se på alternativ (2), som kan opfattes som en ad hoc-udgave af (1). Spørgsmålet er dog, hvor meget man taber ved det, for ud fra en umiddelbar betragtning lyder det ikke nemt at identificere virkninger fra ændringer i  $K$  på  $L$ ,  $E$  og  $M$ . Det, vi er mest interesserede i, er da også at modellere trægheden

---

<sup>29</sup>Der tænkes på omkostninger i vid forstand. Således vil der være omkostninger ved at nedbringe leveringstider og omkostninger ved finansiering.

i  $K$  og ikke så meget "installationseffekten" fra  $K$  over på de andre faktorer. På den anden side må man så huske på, at det ekstra omkostningsbidrag i ad hoc-løsningen ikke kommer til at figurere nogen steder, og i modelsammenhæng er der altså tale om helt fiktive omkostninger, som virksomheden ganske vist reagerer på, men som den aldrig betaler til nogen.<sup>30</sup>

## 6.1. Den teoretiske model

Af enkelhedshensyn holder vi os altså til de eksterne tilpasningsomkostninger (2), og for at gøre det så let som muligt at regne på, antager vi ydermere følgende funktion for de samlede omkostninger fra periode  $t$  til periode  $t + \tau$ .

$$C = \sum_{i=0}^{\tau} (1+r)^{-i} \left[ \gamma_1 [X_{t+i} - X_{t+i}^*]^2 + \gamma_2 [X_{t+i} - X_{t+i-1}]^2 \right] \quad (6.1)$$

Den træge faktor (kapitalapparatet) kaldes i det følgende  $X$ , og i det andet led i (6.1) ses det som ovenfor, at tilpasningsomkostningerne er kvadratiske i ændringen i  $X$ . I det første led kommer der et bidrag fra den kvadrerede afvigelse mellem  $X$  og  $X^*$ , og det er simpelthen en proxy for de omkostninger, der er ved ikke at være i omkostningsminimum (dvs.  $C - C^*$ ). Til sidst ses det, at de fremtidige omkostninger diskonteres tilbage med diskonteringsrenten  $r$ .<sup>31</sup>

Disse tilbagediskonterede omkostninger,  $C$ , skal vi nu minimere, givet at vi kender  $r$  og alle  $X^*$ 'erne fra tidspunkt  $t$  til tidspunkt  $t + \tau$ , og givet at vi kender  $X_{t-1}$ . Det første, vi gør, er imidlertid at slå den ene af  $\gamma$ 'erne ihjel ved at dividere højresiden i (6.1) med  $\gamma_2$ , idet vi definerer  $\gamma$  som  $\gamma_1/\gamma_2$ . Da det matematisk set er det enkleste, lader vi desuden  $\tau = \infty$ , og vi skal da løse følgende problem:

$$\min C = \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} \left[ \gamma [X_{t+i} - X_{t+i}^*]^2 + [X_{t+i} - X_{t+i-1}]^2 \right]. \quad (6.2)$$

I parameteren  $\gamma$  ligger nu *forskellen* på de tidligere  $\gamma$ 'er, og  $\gamma$  beskriver nu, hvor meget afvigelser fra  $X^*$  vægter i forhold til ændringer i  $X$ . Førsteordensbetingelsen bliver den såkaldte "Euler-ligning", som findes ved at differentiere (6.2) (der er i realiteten uendeligt mange førsteordensbetingelser, som alle indeholdt i (6.3)).

<sup>30</sup>Det mest plausible var at fortolke den eksterne tilpasningsomkostning som et forøget køb af serviceydelser,  $M$ , således at der går en betalingsstrøm fra virksomheden til materialeleverandørerne og en leverance den anden vej.

<sup>31</sup>Hvis der er inflation i systemet, svarende til at alle faktorpriserne stiger med et antal procent pr. år, vil omkostningerne ved ikke at være i optimum (og vel også tilpasningsomkostningerne) stige med samme antal procent pr. år. Derfor må diskonteringsrenten være at opfatte som (den forventede) realrente, dvs. (den forventede) nominelle rente minus (den forventede) inflationstakt.



$$\frac{1}{1+r} X_{t+i+1} - \left(1 + \frac{1}{1+r} + \gamma\right) X_{t+i} + X_{t+i-1} = -\gamma X_{t+i}^*, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (6.3)$$

Jeg vil ikke her gå i detaljer med, hvordan man løser en sådan differensligning, men blot henvise interesserede til den udmærkede Nickell (1985) eller til From (1994) side 56. Men man kan vise, at (6.3) har løsningen:

$$D(X_t) = \lambda \left[ X_t^{**} - X_{t-1} \right], \quad (6.4)$$

hvor

$$X_t^{**} = \left(1 - \frac{1-\lambda}{1+r}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda}{1+r}\right)^i X_{t+i}^* \quad (6.5)$$

og hvor  $\lambda$  er givet som

$$\lambda = 1 - \frac{1+r}{2} \left[ 1 + \frac{1}{1+r} + \gamma - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{1+r} + \gamma\right)^2 - \frac{4}{1+r}} \right]. \quad (6.6)$$

Der vil i (6.6) gælde, at  $0 \leq \lambda \leq 1$ , og vi får således en model, som tilpasser sig partielt til  $X^{**}$  i (6.4), hvor  $X^{**}$  selv er et vægtet gennemsnit af alle de fremtidige  $X^*$ er (6.5). Udtrykket for tilpasningsparameteren er desværre ret indviklet, men man kan dog overbevise sig om, at  $\lambda$  ligger mellem nul og én, givet at  $\gamma$  ikke er negativ og givet at  $r \geq -100\%$ .  $X^{**}$  er en konveks kombination af alle de fremtidige  $X^*$ er, og det ses specielt, at vi får en helt almindelig partiel model, hvis der er statiske forventninger.<sup>32</sup>

$$D(X_t) = \lambda \left[ X_t^* - X_{t-1} \right], \quad \text{hvis } X_{t+i}^* = X_t^*. \quad (6.7)$$

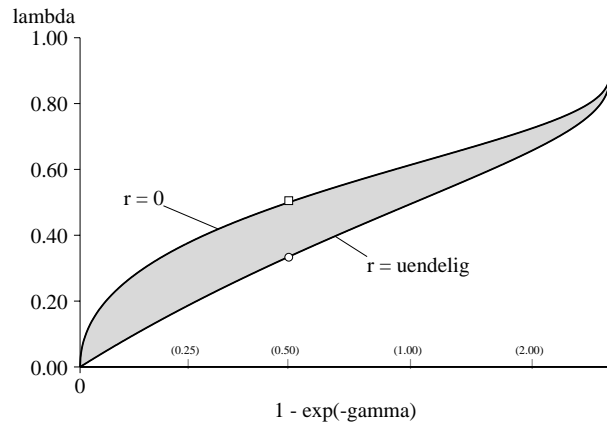
Det er imidlertid vanskeligt at gennemskue, hvordan tilpasningshastigheden,  $\lambda$ , afhænger af renten,  $r$ , og vægningen til afvigelser fra  $X^*$ ,  $\gamma$ . Det er derfor søgt illustreret i den følgende figur, som plotter  $\lambda$  som funktion af  $\gamma$  for givet  $r$ . Her skal man dog bemærke, at førsteaksen angiver størrelsen af udtrykket  $1 - \exp(\gamma)$ , hvorved alle værdier af  $\gamma \in [0; \infty[$  bliver "projiceret" ned på intervallet  $[0; 1[$ . I figuren er angivet de fire værdier 0.25, 0.50, 1.00 og 2.00 for  $\gamma$  selv i parentes.

---

<sup>32</sup>hvilket følger af, at

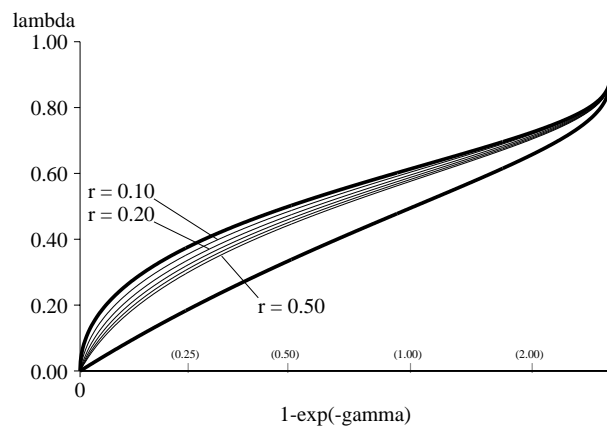
$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < x < 1.$$

**Figur 6.1. Sammenhængen mellem tilpasningshastighed, rente og vægt til afvigelser fra  $X^*$ .**



Firkanten i figuren angiver, hvor stor tilpasningshastigheden skal være, givet at  $\gamma$  er lig 0.50 og givet at renten er lig nul, hvilket giver en tilpasningshastighed på 0.50. Lader vi renten gå mod uendelig (cirklen), svarer det til at betragte en virksomhed, som *kun* kigger på indeværende periode, og her får vi en tilpasningshastighed på 0.33. På linjen mellem firkanten og cirklen ligger så tilpasningshastigheder for  $0 < r < \infty$  (vi ser bort fra negative (real)renter), og umiddelbart ser variationsområdet for  $\lambda$  ikke så stort ud, som man måske kunne tro på forhånd. Dette ses endnu tydeligere i den følgende figur, hvor renteniveauerne 0.10-0.50 også er indtegnet.

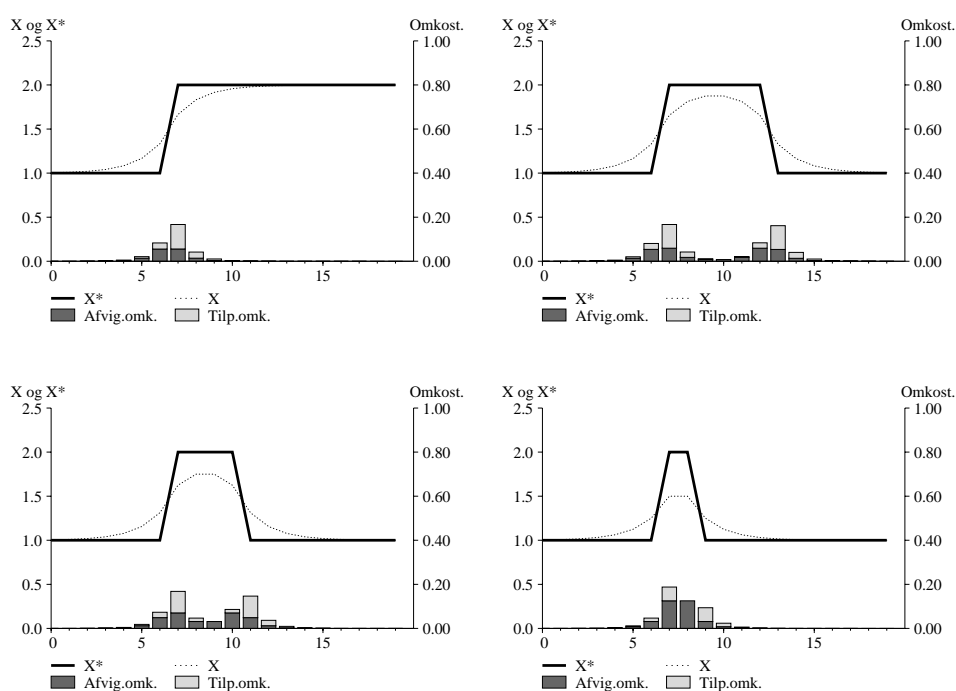
**Figur 6.2. Sammenhængen mellem tilpasningshastighed, rente og vægt til afvigelser fra  $X^*$ .**



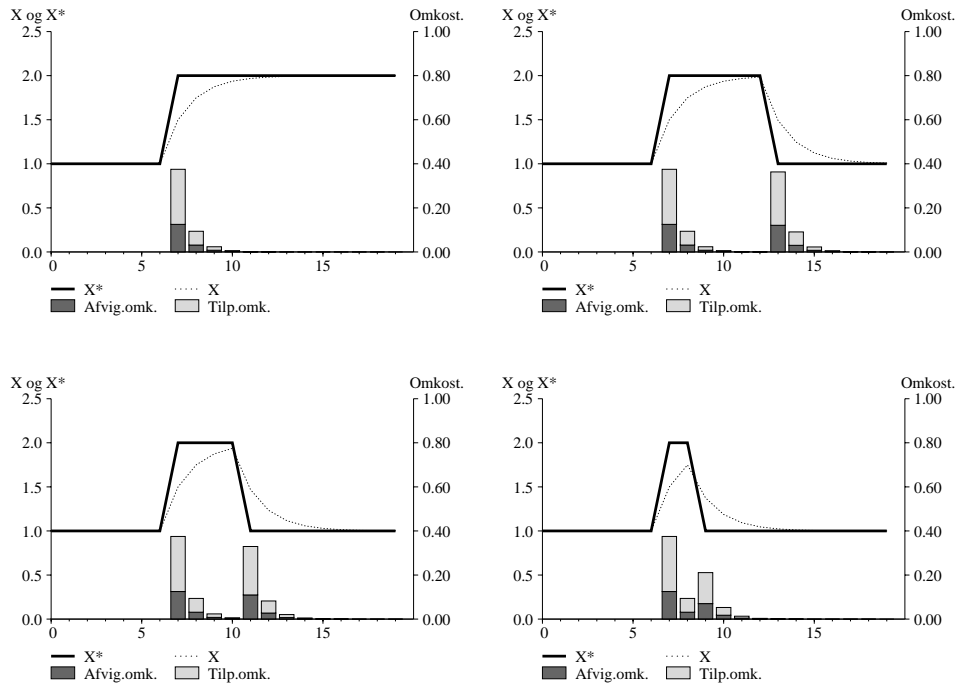
Her kan man se, at det ikke betyder så forfærdeligt meget for tilpasningshastigheden, om renten er fx 0% eller 10%.

Nedenfor følger figurer, som viser, hvordan vores virksomhed reagerer på ændringer i  $X^*$ , idet der antages perfekt forudseenhed og at  $\gamma = 0.50$  og  $r = 0$  (og dermed  $\lambda = 0.50$ ).

**Figur 6.3. Reaktion på ændringer i  $X^*$  med perfekt forudseenhed**



Med perfekt forudseenhed reagerer virksomheden på stignigen i  $X^*$  i god tid i forvejen, således at  $X$  i tilfældet med en permanent stigning i  $X^*$  allerede har tilpasset sig med godt en tredjedel i året før springet i  $X^*$  indtræffer (år syv). Med statiske forventninger er der naturligvis ikke en sådan forudseenhed, og der er derfor meget store tilpasningsomkostninger i "springåret" (år syv). I de tilfælde, hvor  $X^*$  falder tilbage, er der også store tilpasningsomkostninger i disse år.

**Figur 6.4. Reaktion på ændringer i  $X^*$  med statistiske forventninger****Vækst i  $X^*$** 

Til sidst undersøges det, hvad der sker, hvis  $X^*$ 'erne følger en lineær trend. Denne øvelse kan man også med lidt god vilje oversætte til tilfældet med eksponentiel vækst, idet man så må opfatte  $X^*$ 'erne som *logaritmen* til de egentlige  $X^*$ 'er.

Vi siger nu, at  $X^*$  stiger med  $v$  enheder pr. periode, og med perfekt forudseenhed får vi da vha. (6.4) og (6.5) følgende partielle model med konstantled:<sup>33</sup>

$$D(X_t) = \lambda \left[ v \frac{1-\lambda}{r+\lambda} + X_t^* - X_{t-1}^* \right], \quad \text{hvis } X_{t+i}^* = X_t^* + v \cdot i. \quad (6.8)$$

hvor  $\lambda$  stadig er givet vha. ligning (6.6). En trend i  $X^*$  giver altså med perfekt forudseenhed et konstantled i vores partielle tilpasningsligning. Af (6.8) følger det,

<sup>33</sup>Her udnyttes, at

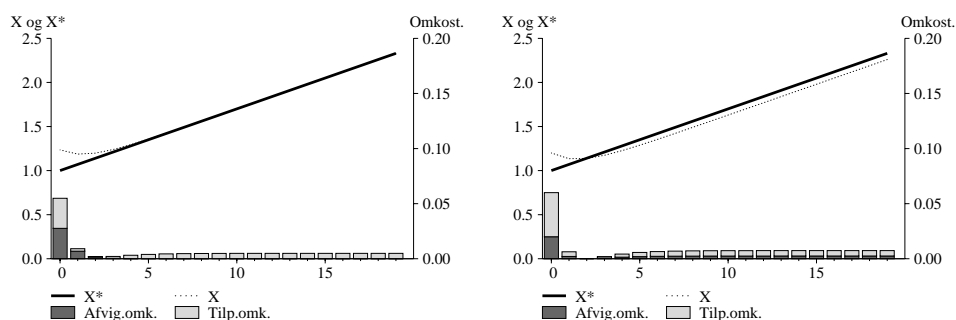
$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \quad \text{samt at } \sum_{i=0}^{\infty} x^i \cdot i = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad 0 < x < 1.$$

at væksten i  $X$  på langt sigt vil være lig væksten i  $X^*$ , men man kan spørge, om det er optimalt for virksomheden at tilpasse væksten i  $X$ , således at  $X$  i hver periode er lig  $X^*$ , eller om  $X$  vil "halte bagefter". Ved at regne på det, finder man ud af, at

$$X_t^* - X_t \rightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{v r}{\lambda + r} \quad \text{for } t \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

På langt sigt vil der således ikke være noget gab mellem  $X$  og  $X^*$ , givet at  $r = 0$ . Men hvis  $r$  er større end nul, vil det med perfekt forudseenhed være optimalt at halte bagefter  $X^*$ , også på langt sigt. Hvis renten er nul og  $X$  fra starten af er langt fra  $X^*$ , vil der gå et stykke tid, før  $X$  ligger oven i  $X^*$ , men det vil ske før eller siden, jf. følgende figur. I den venstre del af figuren er der perfekt forudseenhed, mens der i den højre del er statistiske forventninger (hvorved konstantleddet i (6.8) forsvinder, idet virksomheden forventer at  $v = 0$ ).

**Figur 6.7. Vækst i  $X^*$ , perfekt forudseenhed (venstre) hhv. statistiske forventninger (højre)**



Det ses ikke overraskende, at hvis virksomheden har statistiske forventninger, vil  $X$  halte bagefter  $X^*$ . Om en sådan forventningsdannelse er rimelig på længere sigt, er naturligvis diskutabelt, for hvis der virkelig *er* vækst i  $X^*$ , skulle man tro, at forventningerne før eller siden tilpassede sig. Det vil dog føre for vidt at diskutere, hvorledes virksomhederne tænkes at lære af erfaringen, idet dette er et stort emne i sig selv.

## 6.2. Diskussion

### Er det nødvendigt, at tilpasningsomkostningerne er kvadratiske?

Ofte fremføres det som et argument for træghed i tilpasningen af kapitalapparatet, at tilpasningsomkostningerne er konvekse, dvs. stiger mere end proportionalt med den numeriske ændring i  $K$ . For hvis omkostningerne blot var proportionale med den numeriske ændring i  $K$ , kunne man jo lige så godt tage den fulde tilpasning med det samme, for som følge af proportionaliteten sparer man jo intet ved at dele tilpasningen op i bidder.

I en verden uden usikkerhed og med renten  $r$  sat til nul er dette rigtigt, hvis vi forestiller os standardtilfældet, hvor  $X$  og  $X^*$  altid har været lig én og hvor  $X^*$  så pludselig stiger permanent til  $X^* = 2$ . Med proportionale tilpasningsomkostninger vil det da være optimalt at ændre  $X$  fuldt ud med det samme, men hvad nu hvis virksomheden véd, at  $X^*$  falder tilbage til én lige bagefter? Så kan det ikke længere være optimalt at tilpasse 100% med det samme, og der må derfor være en eller anden form for træghed i tilpasningen.

Dette argument kan også bruges til at argumentere for, at der også kan være trægheder, selv om omkostningerne stiger *mindre* end proportionalt med den numeriske ændring i  $K$ . Det sidste kunne man godt forestille sig, givet at det kan være besparende at foretage storindkøb af ny teknologi (fx pc-ere) og høste de eventuelle (stordrifts)fordele, det måtte give at omskole/videreuddanne medarbejderne på én gang. Men selv om der *var* stordriftsfordele, ville man altså være tilbageholdende med at tilpasse  $X$  fuldstændigt, med mindre man havde absolut vished for, at stigningen i  $X^*$  var kommet for at blive.

Desværre er alt andet end kvadratiske omkostninger matematisk set meget vanskeligt at have med at gøre. Antages således proportionale tilpasningsomkostninger,  $\gamma_2 |D(X)|$ , introducerer man en ubehagelig diskontinuitet i førsteordensbetingelserne, som så vidt jeg kan se gør problemet næsten umedgørligt, i hvert fald hvis vi taler om virksomheder, som kigger mere end et par perioder frem.

### Stokastik/usikkerhed

Indtil videre har vi udelukkende set på deterministiske forløb af  $X^*$ , og en oplagt mulighed ville være at postulere en eller anden stokastisk proces for  $X^*$ , benævnt som  $\tilde{X}^*$ . Inden for den gennemgåede models rammer, ændrer dette imidlertid ikke fundamentalt ved virksomhedernes adfærd, idet der med den kvadratiske formulering vil være såkaldt sikkerhedsækvivalens ("certainty equivalence"), således at

problemet løses ved at erstatte de fremtidige stokastiske  $\tilde{X}^*$ 'er med deres betingede middelværdi (jf. Nickell (1985) og From (1994)).

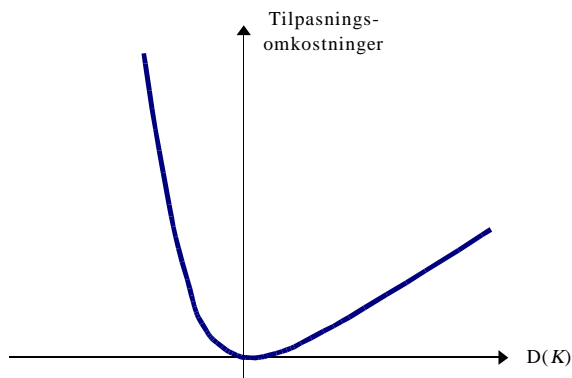
Man kunne fx antage, at  $\tilde{X}^*$  følger en random walk med drift,  $\tilde{X}_t^* = \tilde{X}_{t-1}^* + v + u_t$ , hvor  $u$ 'erne er hvid støj og  $v$  er en konstant. Tages den matematiske forventning af dette udtryk får vi så, at  $E[\tilde{X}_{t+i}^* | t] = X_t^* + v \cdot i$ , idet  $X_t^*$  er kendt på tidspunkt  $t$  (og udgøres af en deterministisk trend samt hele fortiden af  $u$ 'er). Dette giver planer, som er helt ækvivalente med de tidligere udledte uden usikkerhed.

I Nickells artikel gennemgås en række stokastiske processer og deres betydning for den optimale adfærd. Det interessante er, at ved at generalisere den stokastiske proces til en andenordens autoregressiv proces med "enhedsrod" og drift ( $\tilde{X}_t^* = \theta \tilde{X}_{t-1}^* + (1-\theta)\tilde{X}_{t-2}^* + v + u_t$ ), bliver den optimale tilpasningsmodel til en fejlkorrektionsmodel, dvs. med fri førsteårseffekt af  $X^*$  på  $X$  og med resten af tilpasningen foregående partielt (jf. evt. kapitel 7, side 84). Ved at generalisere den stokastiske proces yderligere, får man en endnu mere fleksibel tilpasningsproces, jf. Nickell (1985) side 125. Formuleringen af den stokastiske proces er altså af væsentlig betydning for hvilken tilpasningsmekanisme, man ender op med.

### **Irreversibilitet**

En sidste ting, som kunne være interessant at se på, er tilstedeværelsen af irreversibilitet i investeringsbeslutningen. En anden måde at sige det på er, at det i virkelighedens verden ofte vil være vanskeligt eller måske helt umuligt at sælge overflødigt (brugt) kapitaludstyr. En investeringsbeslutning kan derfor ikke "gøres om" eller fortrydes, og hvis man har investeret for meget, står man derfor tilbage med et for stort kapitalapparat, som det er vanskeligt at få afhændet.

En forholdsvis nem måde at modellere dette på kunne være at lade tilpasningsomkostningerne være stærkt asymmetriske, jf. figuren på næste side, som er taget fra Blanchard/Fisher (1989) side 59. Alternativt må man skrive producentens problem helt eksplicit op, således at man kan pålægge en restriktion om, at (brutto)investeringerne kun kan være positive.

**Figur 6.9** Eksempel på asymmetriske tilpasningsomkostninger

Her er omkostningerne ved at forøge kapitalapparatet næsten proportionale med forøgelsen, mens de stiger eksplosivt, når kapitalapparatet formindskes.<sup>34</sup>

Sammenfattende ser problemet med irreversibilitet ud til at være alvorligst, når vi taler om investeringsgoder med meget lang levetid. Bliver investeringerne derimod afskrevet forholdsvis hurtigt, er problemet mindre, fordi man alligevel reinvesterer relativt meget i hver periode og derfor kan bruge ændringer i reinvesteringerne som stødpude. Sagt på en anden måde, vil en for stor investering i periode  $t$  kunne reguleres ned ved at reinvestere noget mindre end planlagt i periode  $t+1$ .

Da vi i estimationerne kun opererer med maskinkapital, og da vi opererer med en fysisk afskrivningsrate på omkring 15% om året (cirka svarende til seks års levetid), er problemet hvad maskininvesteringer formentligt til at overse. For indenfor modelens rammer, vil virksomhederne i hver periode være nødt til at investere 15% af kapitalapparatets størrelse blot for at holde dette intakt, og sættes reinvesteringerne ud af kraft, vil kapitalapparatet således "af sig selv" reduceres med 15%.

Men problemet er naturligvis påtrængende, hvis vi vil til at modellere bygningsinvesteringer, for her må man regne med, at bygningerne/anlæggene lever i årtier, og hvis afskrivningsraten kun er på et par procent, er "afskrivningsregulatoren" ikke længere nær så anvendelig.

---

<sup>34</sup>Hvilket altså kan opfattes som en måde at sige på, at virksomheden ikke får noget for det, når det sælges.



**Konklusion på kapitlet**

Undersøgelsen i dette kapitel har peget på, at renteniveauet formentlig ikke har den store betydning for den optimale tilpasningshastighed, hvorfor denne effekt ikke vil blive forsøgt inddraget i estimationerne i det næste kapitel.

Desuden er det blevet vist, at tilpasningsomkostninger vil give trægheder i de produktionsfaktorer, som kendetegnes ved sådanne omkostninger. Som nævnt peger teorien på, at man med en passende formulering af den stokastiske proces for  $X^*$ 'erne kan få fx en fejlkorrigeringsmodel for tilpasningen, og en sådan vil blive afprøvet i næstfølgende kapitel.

## 7. Estimationer

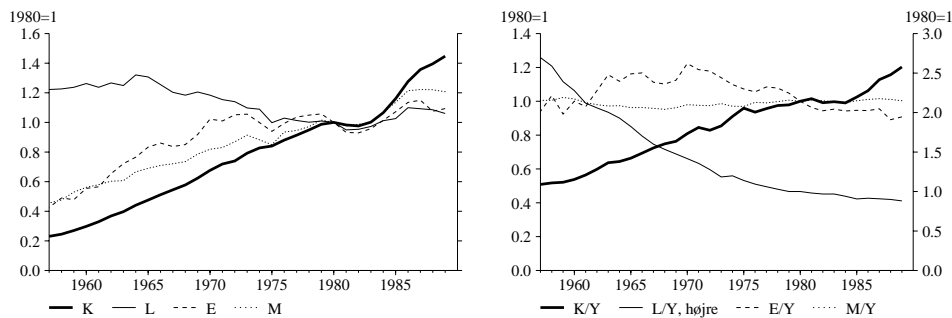
I dette kapitel er det tanken at vise, hvad apparaturet på de foregående sider kan bruges til. Det har læseren muligvis også spurgt sig selv om, og for at besvare det spørgsmål, forsøges det i det følgende at estimere et enkelt aggregeret ADAM-erhverv vha. den dynamiske tredje generations GLO-funktion, som den er beskrevet i afsnit 5.4. En sådan fremgangsmåde er måske lidt betænkelig, for erfaringen viser, at der ofte kan være store forskelle på aggregerede størrelser i forhold til de enkelte erhverv. Men formålet er primært at *illustrere*, og en decideret sektoranalyse falder klart uden for denne opgaves rammer og hensigt.

De følgende estimationer er også skabelonagtige på den måde, at der ikke er kigget specielt meget på detaljer. Der ville således være rig lejlighed til at se nærmere på de enkelte observationer for at se, om der var nogle oplagte forklaringer på, at modellen rammer galt i dette eller hint år. Visse udbygningsmuligheder ligger dog lige for, og de vil blive diskuteret i afsnit 7.2. Herudover vil vi aftefte et stort antal hypoteser, hvad kortsigtsdynamik, nestningsstruktur og trends angår. Det gøres både, fordi det naturligvis er yderst interessant i sig selv, men også for at illustrere, hvor relativt enkelt det er at teste interessante hypoteser i et system som det givne.

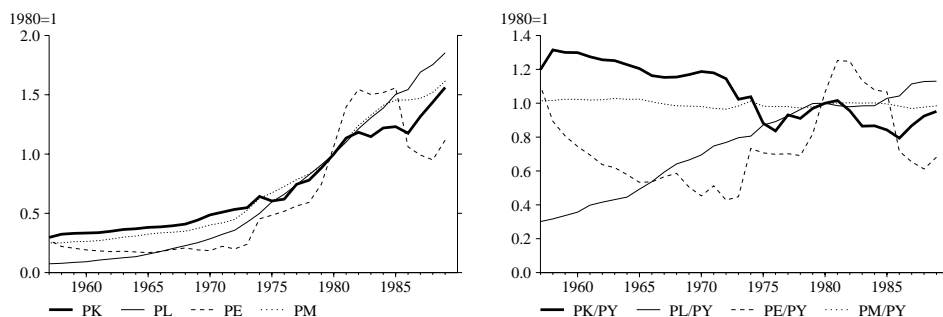
### 7.1. En illustrativ estimation

Før vi går i gang med at estimere, er det nok en fordel at præsentere de tal, der estimeres på. Der estimeres på aggregatet af 13 af ADAMs i alt 19 erhverv, idet der udelades offentlig sektor (ADAM-erhvervscode: *o*), de tre energierhverv (*e*, *ng* og *ne*) samt søtransport (*qs*) og boligbenyttelse (*h*). De 13 erhverv udgjorde i 1989 83% af den private sektors BFI og 97% af den private sektors beskæftigelse, hvilket dækker over, at der så godt som ikke er noget beskæftigelsesindhold (men nok værditilvækst) i de fem udeladte private erhverv. For at få lidt fornemmelse for tallene, vises både faktormængder og -priser i de følgende grafer; dels i niveau og dels divideret med produktionen hhv. prisen på produktionen.

**Figur 7.1. De fire produktionsfaktorer, i niveau og som intensitet (divideret med  $Y$ )**



**Figur 7.2. De fire faktorpriser, i niveau og deflateret (divideret med  $P_Y$ )**

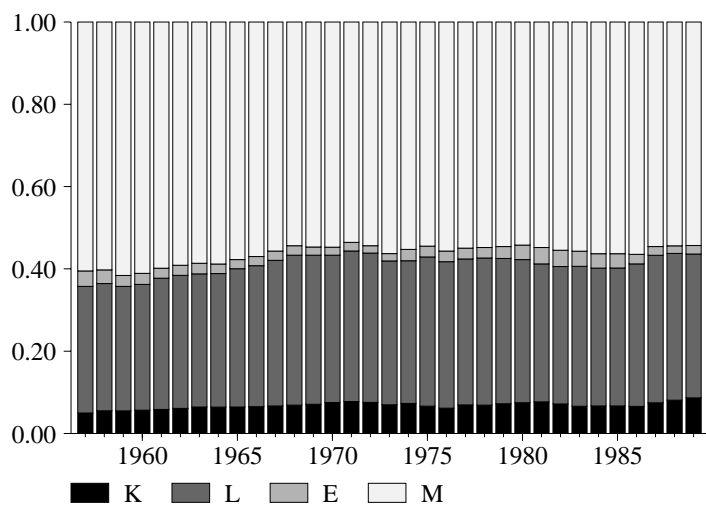


Kendetegnende er det, at kapitalkvoten ( $K/Y$ ) har været stigende, mens beskæftigelseskvoten ( $L/Y$ ) har været kraftigt faldende. Hvad angår energi- og (specielt) materialekvoten er der ikke nogen tydelig langsigtet trend, men energiforbruget bevæger sig dog væsentligt mere end materialeforbruget, som er tæt på at udgøre en fast andel af produktionen.

Udviklingen i reale usercost ( $P_K/P_Y$ ) har været svagt faldende, med en del fluktuationer, som primært hidrører fra renten og et udtryk for den forventede inflation. Reallønnen ( $P_L/P_Y$ ) har været konstant stigende, dog med aftagende tendens fra omkring midt i 1970-erne. Den reale energipris ( $P_E/P_Y$ ) svinger meget voldsomt, og specielt ses oliekriserne i 1973/74, 1979/80 og energiprisfaldet i 1985/86. Den reale materialepris ( $P_M/P_Y$ ) sker der til gengæld ikke meget med.

Til sidst vises en figur med historiske omkostningsandele for de fire produktionsfaktorer, så man kan danne sig et indtryk af, hvor vigtige (målt som omkostning) faktorerne er.

**Figur 7.3. Historiske omkostningsandele ( $P_i X_i / C$ ) for de fire produktionsfaktorer**



Tallene er blevet til i forbindelse med ADAMs faktorefterspørgselsprojekt (eller "udbudsprojekt") og har den historie, at de ikke er blevet ændret siden juli 1993 og at der allerede er blevet estimeret ganske meget på dem. Der er desværre ikke plads til en mere detaljeret beskrivelse, men i bilag C er givet en summarisk oversigt over datakonstruktionen.

### 7.1.1. Modellen

For at kunne teste, om arbejdskraften er træg eller ej, formuleres  $K$  og  $L$ , så de tilpasser sig langsomt mod ligevægt, mens de to fleksible faktorer,  $E$  og  $M$ , sørger for, at vi hele tiden "ligger på produktionsfunktionen". De to træge faktorer tilpasser sig mod de optimale/langsigtede niveauer, men kortsigtsdynamikken for  $L$  er formuleret på en lidt aparte måde, som skyldes ønsket om at kunne teste, hvorvidt  $L$  virkelig er træg eller ej. Således bevæger  $L$  sig ikke imod  $L^*$ , men mod  $L^+$ , som er det arbejdskraftforbrug, der ville være optimalt, hvis kun  $K$  var træg (og  $L$ ,  $E$  og  $M$  altså var fleksible).

Kortsigtsdynamikken er i det følgende defineret som en slags "fleksibel" partiel tilpasning, idet der i det første år tillades fri reaktion, mens resten af tilpasningen foregår rent partielt. Dette kaldes ofte en fejlkorrektionsmodel, og som sådan har den samme struktur som fx forbrugsligningen i ADAM, se evt. Danmarks Statistik (1993) side 38. For de to træge faktorer,  $K$  og  $L$ , ser tilpasningen ud som følger (ihukommende den tekniske finurlighed med, at  $L$  tilpasser sig imod  $L^+$  og ikke  $L^*$ ):

$$D\log(X) = \lambda_1 D\log(X^*) + \lambda_2 [\log(X^*(-1)) - \log(X(-1))], \quad 0 < \lambda_1 < 1, \quad 0 < \lambda_2 < 1 \quad (7.1)$$

Restriktionerne på  $\lambda$ 'erne følger af, at faktorerne antages træge og teoretisk set ikke må "overshooote". Sættes  $\lambda_1 = \lambda_2$  har vi en rent partiel model,

$$D\log(X) = \lambda [\log(X^*) - \log(X(-1))], \quad 0 < \lambda < 1, \quad (7.2)$$

og fejlkorrektionsmodellen kan derfor opfattes som en generaliseret partiel model, hvor der tillades en fri førsteårseffekt af  $X^*$  på  $X$ , mens resten af tilpasningen foregår partielt.

På næste side kan modellen ses i sin helhed (dog uden pålagt separabilitet mht  $M$ , jf. senere).

## Oversigt over faktorefterspørgselsmodellen

$$(1) Z_i = \exp(\omega_i t + \bar{\omega}_i t^2), \quad P_i = \frac{P_i^{\text{obs}}}{Z_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$(2) X_1^+ = Y \left[ \beta_{11} + (\beta_{12} P_2^{0.5} + \beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_4^{0.5}) P_1^{-0.5} \right]$$

$$(3) \log(X_1^{\text{obs}}) = \log(X_1^{\text{obs}}(-1)) + \lambda_1 \text{Dlog}(X_1^+/Z_1) + \lambda_2 [\log(X_1^+(-1)/Z_1(-1)) - \log(X_1^{\text{obs}}(-1))]$$

$$(4) X_1 = Z_1 X_1^{\text{obs}}$$

$$(5) X_2^+ = Y \left[ \beta_{22} + \left( \beta_{12} \frac{\beta_{12} P_2^{0.5} + \beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_4^{0.5}}{X_1/Y - \beta_{11}} + \beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5} \right) P_2^{-0.5} \right]$$

$$(6) \log(X_2^{\text{obs}}) = \log(X_2^{\text{obs}}(-1)) + \bar{\lambda}_1 \text{Dlog}(X_2^+/Z_2) + \bar{\lambda}_2 [\log(X_2^+(-1)/Z_2(-1)) - \log(X_2^{\text{obs}}(-1))]$$

$$(7) X_2 = Z_2 X_2^{\text{obs}}$$

$$(8) X_3 = Y \left[ \beta_{33} + \left( \frac{\beta_{23} \beta_{12} (\beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) + \beta_{23} (\beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) [X_1/Y - \beta_{11}] + \beta_{13} \beta_{12} (\beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) + \beta_{13} (\beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_4^{0.5}) [X_2/Y - \beta_{22}] + \beta_{34} P_4^{0.5}}{[X_1/Y - \beta_{11}] [X_2/Y - \beta_{22}] - \beta_{12}^2} \right) P_3^{-0.5} \right]$$

$$(9) X_4 = Y \left[ \beta_{44} + \left( \frac{\beta_{24} \beta_{12} (\beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) + \beta_{24} (\beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) [X_1/Y - \beta_{11}] + \beta_{14} \beta_{12} (\beta_{23} P_3^{0.5} + \beta_{24} P_4^{0.5}) + \beta_{14} (\beta_{13} P_3^{0.5} + \beta_{14} P_4^{0.5}) [X_2/Y - \beta_{22}] + \beta_{34} P_3^{0.5}}{[X_1/Y - \beta_{11}] [X_2/Y - \beta_{22}] - \beta_{12}^2} \right) P_4^{-0.5} \right]$$

$$(10) X_3^{\text{obs}} = \frac{X_3}{Z_3}, \quad X_4^{\text{obs}} = \frac{X_4}{Z_4}$$

I princippet skulle de følgende estimationer være til at forstå ud fra læsningen af de foregående sider. Alligevel gives der i det følgende en kort beskrivelse af de enkelte ligninger. Modellen beskriver følgende inputvariabler som funktion af følgende outputvariabler:

Inputvariabler:  $Y, P_1^{obs}, P_2^{obs}, P_3^{obs}, P_4^{obs}, t$ .  
 Outputvariabler:  $X_1^{obs}, X_2^{obs}, X_3^{obs}, X_4^{obs}$ .

I modellen er  $X^{obs}$ 'erne og  $P^{obs}$ 'erne mængder og priser i observerede enheder, mens de "almindelige"  $X$ 'er og  $P$ 'er er  $X^{obs}$ 'erne og  $P^{obs}$ 'erne i *effektive* enheder. De observerede faktorniveauer forklares således af produktionen,  $Y$ , de observerede faktorpriser samt tiden,  $t$ . Nedenfor er ligningerne gennemgået.

- (1) I (1) dannes de fire effektivitetsindeks, alle som funktion af tiden. Desuden dannes de *effektive* priser ved at dividere de observerede priser med de respektive effektivitetsindeks.
- (2) Det optimale kapitalapparat i effektive enheder ( $X_1^*$ ) beregnes ud fra langsigtsgLO-ligningen (3.35) side 42.
- (3) Tilpasningen foregår i observerede enheder, og derfor regnes  $X_1^*$  og  $X_1^*(-1)$  om til observerede enheder i ligningen (der divideres med  $Z_1$  hhv.  $Z_1(-1)$ ).
- (4) Kapitalapparatet i effektive enheder beregnes til brug i (5), (8) og (9).
- (5) Dette er ligningen for det optimale arbejdskraftforbrug i effektive enheder. Af tekniske årsager er denne ligning ikke pendanten til (2), men er det arbejdskraftforbrug, som ville være optimalt, hvis kun kapitalapparatet var trængt, jf. (5.53) side 71.
- (6) Som i (3) foretrækkes det, at tilpasningen foregår i observerede enheder. Der tilpasses mod niveauet givet i (5) i observerede enheder.
- (7) Arbejdskraften i effektive enheder beregnes til brug i (8) og (9).
- (8)/(9) Dette er det optimale forbrug af energi og materialer (i effektive enheder), givet størrelsen af kapitalapparatet og arbejdskraften (i effektive enheder), jf. (5.60)-(5.61) side 72.
- (10) Til sidst beregnes energi- og materialeforbruget i observerede enheder.

Denne model kunne gøres væsentligt pænere, hvis man for det første lod arbejdskraften udvikle sig mod sit langsigtede/optimale niveau, og hvis man for det andet opererede med tilpasning i *effektive* størrelser. Imidlertid er det som nævnt bekvemt at modellere arbejdskraften på den angivne måde, når man vil teste, om arbejdskraften er træg eller ej, og hvad det andet angår, gjorde det økonometrisk set formentligt ikke den store forskel, om man tilpassede i effektive enheder, men det teoretisk rigtige må være at tilpasse i observerede enheder, for det må være til disse, at eventuelle tilpasningsomkostninger knytter sig.

Hvis tilpasningen for arbejdskraften er øjeblikkelig ( $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 1$ ), vil modellen opføre sig fuldstændigt som en model med kun  $K$  træ, dvs. svarende til (5.53)-(5.55) side 71. Hvis alle de fire  $\lambda$ 'er er lig én, reduceres modellen til en model med rene langsigtsgligninger, svarende til (3.35)-(3.38) side 42. Ved at binde  $\bar{\lambda}_1$  og  $\bar{\lambda}_2$  til én, kan det altså testes, om der er to træe faktorer ( $K$  og  $L$ ) eller kun én ( $K$ ).

Materialerne separeres (svagt) ud i et ydre nest (jf. side 43) for ikke at få for mange parametre, og der opereres med både tiden og tiden i anden i hver af faktorernes effektivitetsindeks.

Estimationerne foregår som systemestimation vha. LSQ-ordren (maximum likelihood-estimation) i programpakken TSP 4.2A. Estimationerne konvergerer hurtigt og uden problemer, men det er dog nødvendigt først at estimere relationerne uden kortsigtsdynamik (som rene statiske/langsigtede relationer) for at få nogle fornuftige startparametre til det dynamiske system. Venstresidevariablerne ( $X_1$ - $X_4$ ) er i logaritmer for at undgå heteroskedasticitet og urimelig nedvægtning af tidlige observationer.<sup>35</sup>

---

<sup>35</sup>Som nævnt i indledningen, er dette ikke en decideret økonometrisk opgave, og det er derfor valgt at nedtone økonometrien. Imidlertid bør det nævnes, at de stokastiske restled i modellen er i ligningerne (3), (6), (8) og (9) i oversigten, idet der som nævnt er taget logaritmer i ligningerne (8) og (9). De resterende ligninger er rene identiteter uden stokastik.

Parametrene estimeres ved at maksimere likelihoodfunktionen (givet normalfordelte restled), hvilket vil sige, at de kvadrerede residualer i de fire relationer lidt forsimplet sagt (hvis kovariansmatricen er diagonal) divideres med relationens estimerede varians, før de lægges sammen til et mål for likelihoodværdien. Det betyder, at vi ikke på forhånd nedvægter nogen af ligningerne, men lader dem være "lige vigtige". Således kunne man godt overveje at vægte ligningerne med deres omkostningsandele eller lignende, men det er altså ikke forsøgt her.

Med kointegrationstermer er det således antaget, at der er fire kointegrationsvektorer – svarende til de fire faktorefterspørgselsligninger – og at fejlkorrektionsleddene i disse relationer ikke betyder noget for produktionen og faktorpriserne, således at disse er såkaldt svagt eksogene. Hvis de fire produktionsfaktorer ikke er stationære (fx er  $I(1)$ ), fortolkes denne ikke-stationaritet som "frembragt" af en ikke-stationaritet i produktion og faktorpriser, og ikke-stationariteten i faktorerne antages at kunne "renses ud" (af residualerne) ved at beskrive dem som funktioner af produktion og faktorpriser (således at den almindelige testteori er gyldig). Noget andet er så, at produktionen og faktorpriserne i virkelighedens verden ikke er uafhængige af forbruget af de fire produktionsfaktorer, idet en ændring på 1% i en af produktionsfaktorerne umiddelbart (dvs. fraregnet eventuelle modsatrettede effekter) forøger produktionsværdien med ca.  $s\%$ , hvor  $s$  er produktionsfaktorens omkostningsandel. Dette er naturligvis værst, hvad materialerne angår (se figur 7.3. side 86), og her skal man oven i købet huske, at det er en nationalregnskabsmæssig konvention, at materialeforbrug (råstofinput) bliver til produktionsværdi krone for krone. Det er også klart, at arbejdskraftforbruget via ledighedens betydning for løndannelsen slår lige ud i denne, mens man kunne håbe, at de andre faktorpriser var "mere eksogene" pga. deres importindhold. Imidlertid ville en inddragelse af alle disse effekter næsten kræve, at man modellerede den samlede økonomi.



**Tabel 7.1. Estimationsresultat, ((KLE)M)-nestningsstruktur, K og L træge**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.30	0.22	-0.07	0.14	-3.9%	-1.2%	0.37	0.59	1.1%	1.14	8.7
<i>L</i>	0.05	-0.21	0.02	0.14	5.6%	1.0%	0.76	0.50	1.5%	1.58	0.7
<i>E</i>	-0.28	0.28	-0.14	0.14	-1.4%	2.4%	•	•	4.0%	1.06	1.6
<i>M</i>	0.02	0.09	0.01	-0.11	0.6%	-0.6%	•	•	1.0%	1.00	0.0

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 371.54

Tabellen læses som følger. Hver linje beskriver en af de fire produktionsfaktorer, og de første fire tal i hver linje er faktorens partielle langsigtede priselasticitet mht. hver af de fire faktorpriser. De 16 tal i  $4 \times 4$ -matricen yderst til venstre udgør den sædvanlige matrix med priselasticiteter, som vanligt med egenpriselasticiteterne på diagonalen.<sup>36</sup>

De næste to søjler med tal viser den relative ændring i den respektive produktionsfaktors effektivitetsindeks i 1960 hhv. 1989. Herefter ses tilpasningshastighederne for *K* og *L*, og i de sidste tre søjler vises ligningernes estimerede spredning, Durbin-Watson-størrelser samt Jarque-Bera-test. Fordelingen af Durbin-Watson-teststørrelsen er en længere historie – specielt når der som i *K* og *L*-ligningen optræder laggede endogene (som vrider teststørrelsen mod to) – så vi nøjes med at sige, at den helst skal være så tæt på 2 som muligt. Jarque-Bera-testet er under nulhypotesen om normalitet af residualerne asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt med to frihedsgrader, således at størrelsen på et 5%-niveau helst skal være mindre end 6.0. Med 30 observationer er denne kritiske værdi imidlertid kun 3.7 på 5%-niveau, jf. Jarque/Bera (1987).

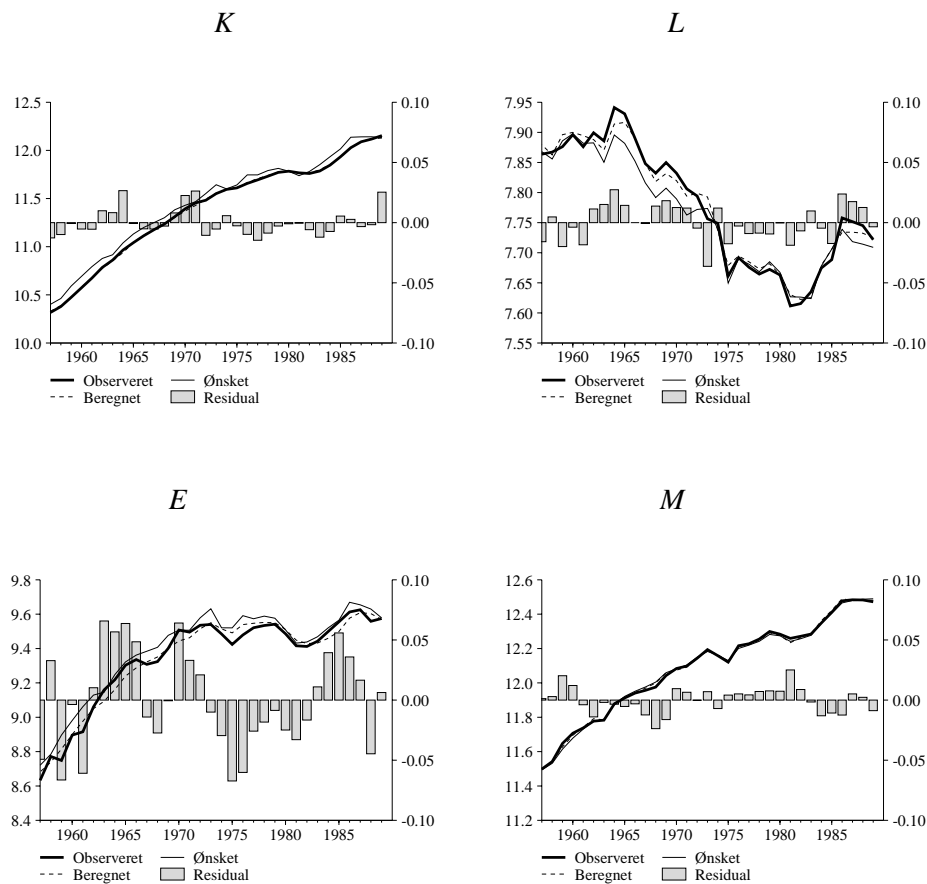
Nederst ses værdien af likelihoodfunktionen i maksimum, og det er den værdi, som bruges til at teste hypoteser med. Pålægges  $n$  parameterrestriktioner, vil to gange reduktionen i (log)likelihoodværdi nemlig være  $\chi^2$ -fordelt med  $n$  frihedsgrader (likelihood-ratio-test), og vi kan på den måde teste, om restriktionen kan lægges på. Det skal dog understreges, at disse tests kun kan opfattes som fingerpeg, idet mo-

<sup>36</sup>Disse egenpriselasticiteter må ikke være negative, idet det er uforeneligt med de teoretiske antagelser om den bagvedliggende produktionsfunktion. Dette er imidlertid ikke et tilstrækkeligt krav, og det er derfor for hver enkelt observation testet, om omkostningsfunktionen er konkav i dette punkt, og dette er i hvert år tilfældet i både den her viste estimation og i alle følgende estimationer.

dellen for det første ikke er lineær i parametrene, og fordi testet kun er asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt.<sup>37</sup>

Nedenfor er gengivet grafer for observeret (faktisk), beregnet (fittet), ønsket (optimalt/langsigtet) samt residualer i hver af de fire ligninger, hvor enhederne på højre-aksen hører til residualerne.

**Figur 7.4. Faktisk, beregnet, ønsket og residual for de fire produktionsfaktorer**



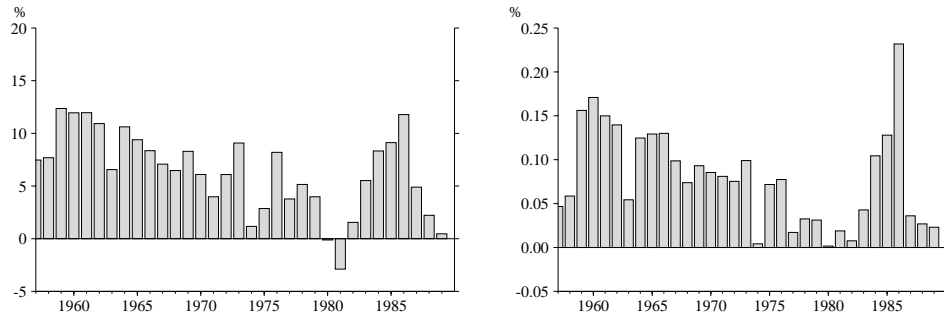
<sup>37</sup>Vores teststørrelser vil i small-sample estimationer som de følgende rent faktisk være for store, idet forskellen i likelihoodværdi med fire ligninger, 33 observationer og syv forklarende variable ifølge en tabel i Otto (19xx) skal multipliceres med omkring 1.5 i stedet for med 2. Vores teststørrelser er derfor godt 30% for store, således at vi vil komme til at afvise (lidt) for mange hypoteser.

Det ses, at restleddene i  $K$ -,  $L$ - og  $E$ -ligningerne er indbyrdes korrelerede, mens de i  $M$ -ligningen varierer modsat, uden at korrelationen dog er stor. Som tabellen indicerede, er der problemer med systematik i residualerne, og uden at det ser decideret hårrejsende ud, er specielt energiligningen – set med det blotte øje – præget af meget systematiske sving i residualerne. At Durbin-Watson-størrelsen i energiligningen overhovedet holder sig på den rigtige side af én, kan man måske undre sig over, men det skyldes formodentligt fortegnsskiftene i starten af estimationsperioden – hvor datakvaliteten ikke er for god. På samme måde ser residualerne i arbejdskraftligningen mere systematiske ud, end DW-størrelsen umiddelbart tyder på, men det er en kendt sag, at en enkelt outlier (som fx observationen i 1973) kan pynte temmeligt meget på DW-størrelsen. Der er jo tale om, at relationen skyder systematisk for lavt igennem 1960'erne og frem til omkring den første oliekrise, hvorefter den har en tendens til at skyde for højt frem til og med 1985. Hvad Jarque-Bera-testet angår, bør residualerne i kapitalligningen bekymre, idet teststørrelsen er større end de stipulerede 3.7, svarende til 95%-fraktilen i (small-sample)fordelingen. Kigger man nøjere på JB-testet, viser det sig, at der er tale om en signifikant skævhed/asymmetri i residualerne, formentligt forårsaget af de fire store positive residualer i 1964, 1970, 1971 og 1989.

Alt i alt må man sige, at der stadig er god plads til forbedringer, men givet en trods alt temmeligt restriktiv kortsigtsdynamik med kun fire tilpasningsparametre, er systematikken trods alt til at leve med. At det er vanskeligere at ramme energiforbruget end de tre andre produktionsfaktorer er en kendt sag, mens forklaringsgraden i de tre andre ligninger må siges at være ganske pæn.

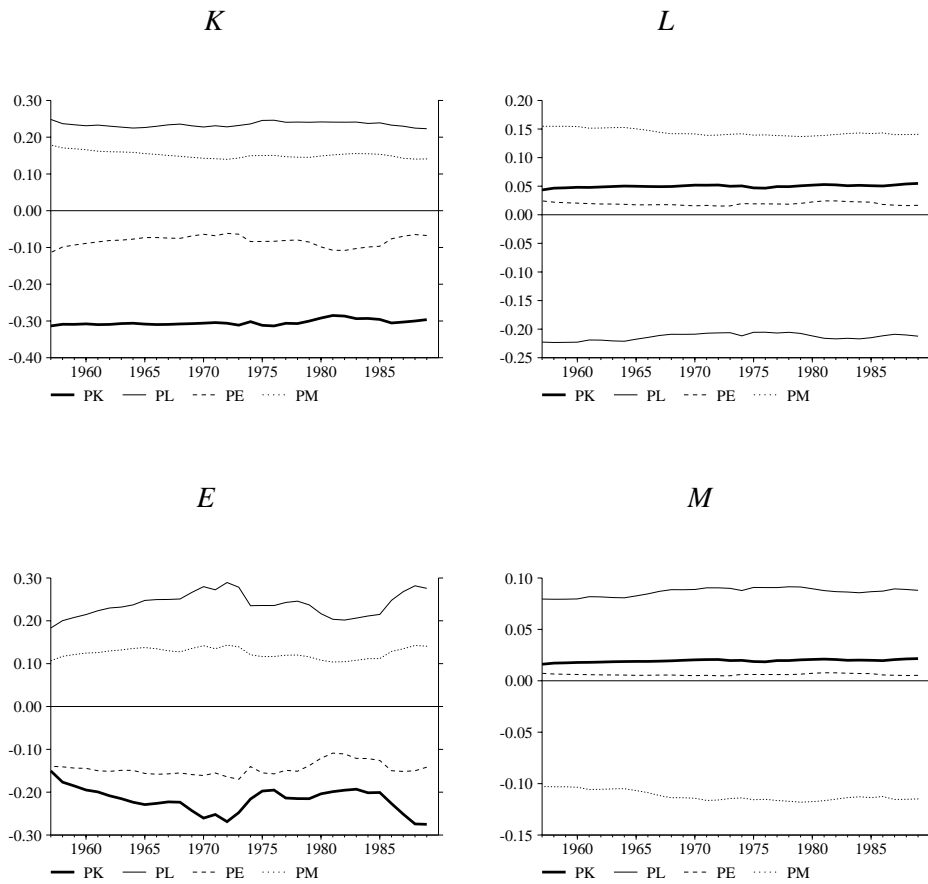
Det kan være interessant at se på, hvor stort det ønskede/optimale kapitalapparat er i forhold til det faktiske, idet dette forhold skulle give et fingerpeg om kapacitetsudnyttelsesgraden. Som vi ser i den følgende figur, har det ønskede kapitalapparat været permanent større end det faktiske, bortset fra årene 1980-81, hvor der var ekstrem lavkonjunktur. I den højre del af figur 7.5 ses de realiserede omkostninger i forhold til de optimale omkostninger, og vi ser for det første, at dette forhold som det skal altid er større end én, og for det andet, at  $C$  afviger meget fra  $C^*$  i år med højkonjunktur (fx 1984-86).

**Figur 7.5.**  $K^*/K$ -forholdet og  $C/C^*$ -forholdet (procentvise afvigelser)



Priselasticiteterne er pænt stabile, jf. efterfølgende figurer:

**Figur 7.6.** Langsigtede partielle priselasticiteter i de fire ligninger.

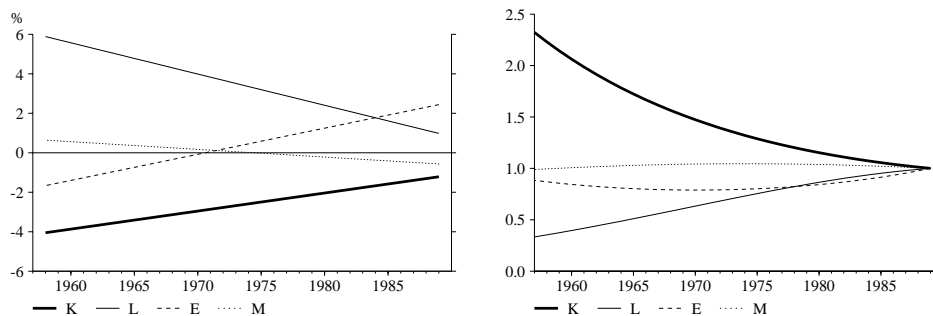


Som nævnt i afsnit 3.2.2. side 41 er der det rare ved GLO-systemet, at krydspriselasticiteterne ikke kan skifte fortegn. Desuden er elasticiteterne – givet den relativt beskedne substitution, vi kan estimere os frem til – mere stabile, end de ville have været i en tilsvarende translogestimation. Dette gælder i særdeleshed for energiligningen, hvor der er tale om den uheldige kombination af en numerisk lav egenpriselasticitet parret med en meget lille omkostningsandel og voldsomme prisbevægelser. Også for GLO er de største bevægelser i elasticiteterne at finde i energiligningen, uden at svingene dog virker urimelige eller decideret urovækkende.<sup>38</sup>

### 7.1.2. Trends

I den følgende figur ser vi både vækstraterne og niveauerne for de fire effektivitetsindeks. Figuren er også gengivet i kapitel 4.

**Figur 6.7. Estimerede effektivitetstrends, vækstrater (venstre) og niveauer (højre)**



Mens det er til at leve med, at der har været en kraftig trend i arbejdskraftens effektivitet (fx som følge af forøget og forbedret uddannelse), ser det underligt ud, at kapitalapparatet skulle være blevet *mindre* effektivt igennem perioden, for hvis der virkelig var tale om tekniske *tilbageskridt*, hvorfor holder producenterne så ikke bare fast i den gamle (og mere effektive) teknologi? Fænomenet er imidlertid en solid kendsgerning – og genfindes også i de enkelte erhverv – men jeg har ikke umiddelbart nogen god forklaring på det. Kapitalapparatet vokser simpelthen hurti-

<sup>38</sup>Lidt forsimplet udtrykt er energiens egenpriselasticitet et spejlbillede af *energikvoten*,  $E/Y$ , mens den i en translogestimation ville følge energiens *omkostningsandel*. Da den første bevæger sig meget mindre end den anden (vi er "langt" fra Cobb-Douglas), er GLO-elasticiteten mere stabil end den tilsvarende translog-elasticitet ville være.

gere, end de relative faktorpriser tilsiger, og så kan modellen kun forklare det ved at postulere, at det bliver *mindre* effektivt.

Det falder lige for at spørge sig selv, om det kunne skyldes, at  $K$  måles forkert, eller at vi opererer med nogle forkerte afskrivningsrater eller benchmarks. Pladsen tillader ikke en nøjere diskussion af dette, men det er klart, at man ved at ændre på benchmarks kan manipulere meget med forløbet af  $K$ . Afskrivningsraten betyder imidlertid ikke noget for væksten i  $K$ , hvilket vises i det følgende.

Lad der være vækst i bruttoinvesteringerne (som for simpelhedens skyld er antaget at være lig én på tidspunkt  $t = 0$ ):

$$I_t = (1+v)^t . \quad (7.3)$$

Idet kapitalapparatet er givet ved

$$K_t = (1-\delta) K_{t-1} + I_t \quad \Leftrightarrow \quad K_t = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\delta)^i I_{t-i} , \quad (7.4)$$

hvor  $\delta$  er afskrivningsraten, kan vi indsætte (7.3) i (7.4), og ved at udnytte sammenhængen i fodnote 32 side 75, får vi så  $K$  som

$$K_t = \frac{1+v}{\delta+v} (1+v)^t . \quad (7.5)$$

Hvis investeringerne ikke vokser ( $v = 0$ ) fås det sædvanlige resultat, at  $K$  er  $1/\delta$  gange så stort som investeringsniveauet. Er der vækst i investeringerne, bliver niveauet for  $K$  noget mindre, men vi ser, at vækstraten i  $K$  under alle omstændigheder er lig  $v$ , uafhængigt af afskrivningsraten,  $\delta$ . Denne stiliserede model siger altså, at hvis kapitalapparatet vokser for hurtigt, kan det kun skyldes, at investeringerne vokser for hurtigt. Man bør derfor passe på med uden videre at skyde skylden for det (for) kraftigt stigende  $K/Y$ -forhold på afskrivningsraten.

I SMEC-rapporten (Det Økonomiske Råd (1990)) og i From (1994) genfindes det samme fænomen. I fodnote 31 side 149 i førstnævnte mener forfatteren, at fænomenet kan forklares, idet der dels peges på, at udviklingen går i retning af en mere kapitalintensiv teknologi og dels, at fænomenet kunne være et udtryk for hurtigere afskrivninger. Det første er givetvis rigtigt (men effekten burde så i princippet gå via de relative faktorpriser), mens jeg ikke tror, jeg forstår det andet argument.<sup>39</sup>

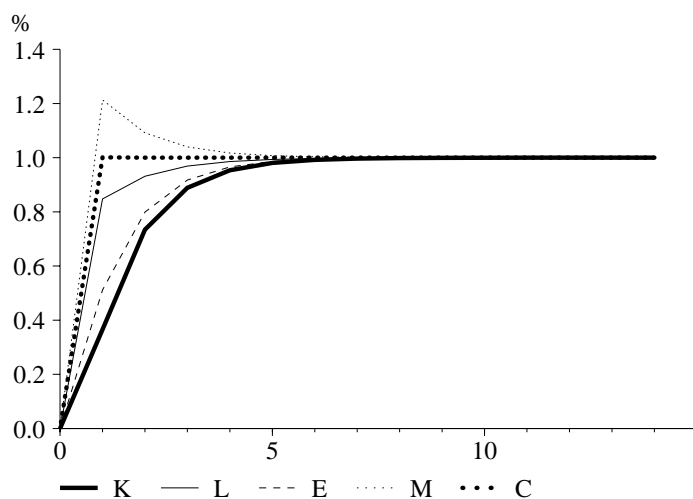
---

<sup>39</sup>En helt anden forklaring kunne være, at der er et nationalregnskabsmæssigt problem med deflateringen af investeringerne, således væksten i investeringsmængden er blevet overvurderet. Men så vidt jeg kan se, skulle man faktisk tro, at det forholdt sig modsat; at væksten i investeringsmængden bliver undervurderet, fordi det er vanskeligt at tage hensyn til kvalitetsforbedringer. (Fx kan man i dag få en hurtig 486 pc-er til under halvdelen af, hvad en 8086 pc-er kostede for seks år siden – og

### 7.1.3. Multiplikatorer

For at få en idé om, hvordan eksogene stød forplanter sig igennem systemet, er der i det følgende foretaget eksperimenter med at hæve produktionen hhv. hver af de fire faktorpriser fra en i øvrigt stationær tilstand. På engelsk kaldes dette en "impulse-response"-analyse, hvilket på dansk oftest benævnes "multiplikatoranalyse", og en sådan er ofte en god idé at foretage for at se, om modellens dynamiske egenskaber overhovedet er til at forstå og fortolke.<sup>40</sup>

**Figur 7.8. Effekt af en forøgelse af produktionen med én procent**



Vi ser af figuren, at trægheden i  $K$  og  $L$  foranlediger et "merforbrug" af materialer, mens energiforbruget stort set følger kapitalapparatet. Omkostningerne,  $C$ , stiger med 1.0013% i det første år og den relativt beskedne kortsigts-meromkostning skal naturligvis ses i forhold til eksperimentets beskedne størrelse. I tabel 7.1 kan vi se, at førsteårseffekten på  $K$  af en 1% stigning i  $K^*$  er på 0.37%, og dette genfindes også i figuren. Hvad arbejdskraften angår, er det lidt mere indviklet, idet den ikke udvikler sig imod  $L^*$  (som er steget med 1%), men mod  $L^+$ ; dvs. det arbejdskraftfor-

---

her er måske tale om en 50-dobling af regnekraften).

<sup>40</sup>Multiplikatorerne er lavet ved først at lade alle de eksogene variabler antage 1989-værdien. Det gælder altså både produktion, faktorpriser og trends, og sættes disse værdier ind i de langsigtede GLO-ligninger, får vi så et helt fladt (stationært) forløb. Dette forløb lader vi være udgangspunktet ("grundkørslen"), og multiplikatoren er så alternativkørslen minus grundkørslen.

brug, der ville være, hvis der kun var træghed i  $K$ . Denne størrelse er imidlertid let at regne ud fra ligning 5.27 side 62:

$$D\log(L^+) = 1 + \frac{e_{LK}}{e_{KK}} (\lambda_K - 1) = 1 + \frac{0.05}{-0.30} (0.37 - 1) = 1.11 . \quad (7.6)$$

Da arbejdskraften tilpasser sig med 76% af dette i det første år, bliver førsteårseffekten på arbejdskraften 0.84%. Givet disse to tal, kan vi ved hjælp af (5.32) og (5.33) side 63 regne ud, hvad der skal bruges af  $E$  og  $M$ . Det bliver:

$$\begin{aligned} D\log(E) = 1 + & \frac{-0.28 (-0.21) - 0.28 \cdot 0.05}{-0.30 (-0.21) - 0.05 \cdot 0.22} (0.37 - 1) \\ & + \frac{-0.28 (-0.30) - (-0.28) 0.22}{-0.30 (-0.21) - 0.05 \cdot 0.22} (0.84 - 1) = 0.53 \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} D\log(M) = 1 + & \frac{0.02 (-0.21) - 0.09 \cdot 0.05}{-0.30 (-0.21) - 0.05 \cdot 0.22} (0.37 - 1) \\ & + \frac{0.09 (-0.30) - (0.02) 0.22}{-0.30 (-0.21) - 0.05 \cdot 0.22} (0.84 - 1) = 1.20 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Førsteårs produktionselasticiteterne for  $K$ ,  $L$ ,  $E$  og  $M$  er altså 0.37, 0.84, 0.53 og 1.20, hvilket stemmer udmærket med figuren. Dette regnestykke illustrerer det rare ved tredjegerationsmodellerne – at de kortsigtede dynamiske effekter er givet ved de langsigtede substitutionseleasticiteter. Ved hjælp af parametrene i tabel 7.1 kunne man således i princippet regne den dynamiske tilpasning ud år for år.

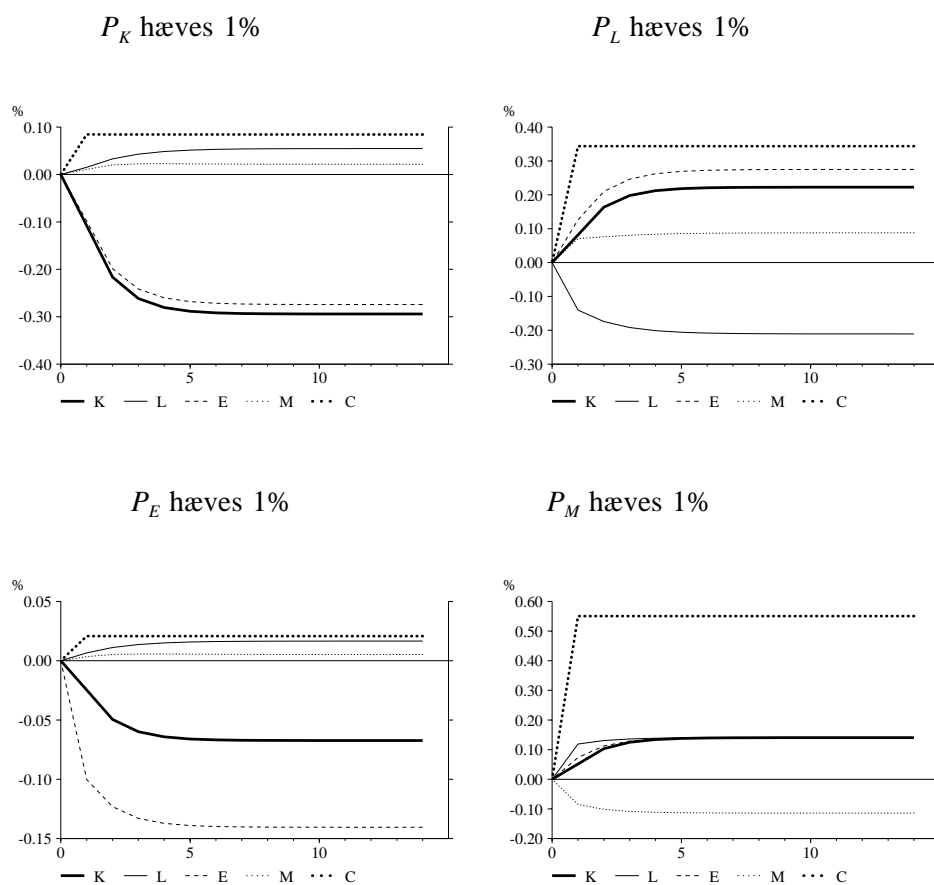
Man kan diskutere, om en førsteårs produktionselasticitet på 1.20 for materialerne er realistisk, eller om det er træghederne i  $K$  og  $L$ , som er så signifikante, at materialerne tvinges til at "over reagere", for at vi kan "blive på produktionsfunktionen". Overshootingen i  $M$  er imidlertid også et kendetegn ved såkaldte andengenerations-estimationer (dvs. med helt fri kortsigtdynamik uden noget krav om, at vi ligger på produktionsfunktionen på kort sigt). I en nylig andengenerations-estimation i modelgruppen på Danmarks Statistik (på samme data og tidsperiode som denne estimation), kom både nestet CES og translog således ud med en førsteårs produktionselasticitet for materialer på 1.14, hvilket ikke er langt fra vores 1.20. I From (1994) genfindes denne overshooting også i andengenerations-estimationerne.

Faktorprismultiplikatorerne (se næste side) ser ganske fornuftige ud, og det bemærkes specielt, at effekten på omkostningerne er lig omkostningsandelen (i optimum) for den faktor, som prisen øges på. Dette er en variant af Shephards Lemma (se (3.24) side 30), og givet at den optimale omkostningsandel ikke afviger alt for meget fra den historiske, ser man denne i 1989 i figuren med historiske omkostningsandele (figur 7.3 side 86).



Der er ingen overshooting i disse faktorprismultiplikatorer (svarende til at de retter sig efter det såkaldte le Chatelier-princip: at kortsigtselasticiteten er mindre end langsigtselasticiteten), men der er dog intet teoretisk til hinder for, at der kunne forekomme overshooting.

**Figur 7.9. Effekt af en forøgelse af hver af faktorpriserne med én procent**



#### 7.1.4. Dekomponering af de optimale/langsigtede faktorniveauer

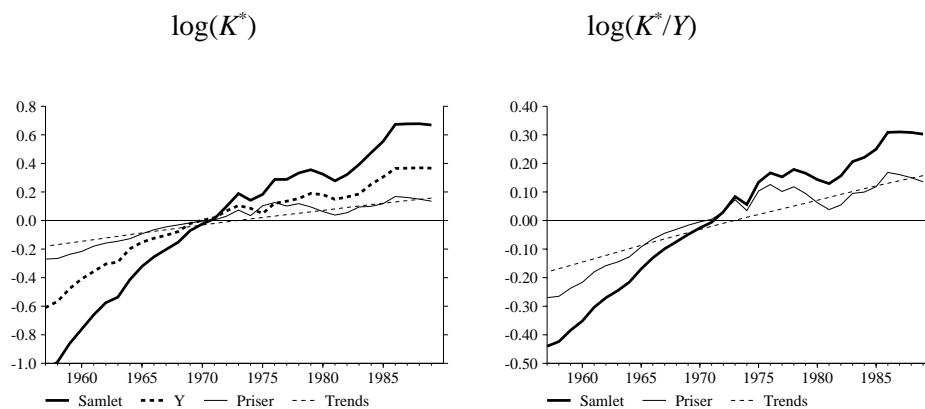
Som vist tidligere i kapitel 4, giver effektivitetsformuleringen af de tekniske fremskridt rig lejlighed til at dekomponere de optimale/langsigtede faktorefterspørgsler. Således kan man dekomponere hver ligning i de tre bidrag fra produktion, faktorpriser og trends, men man kan rent faktisk også dekomponere bidraget fra faktorpriser og trends yderligere og få opklaret, hvor *disse* bidrag stammer fra.

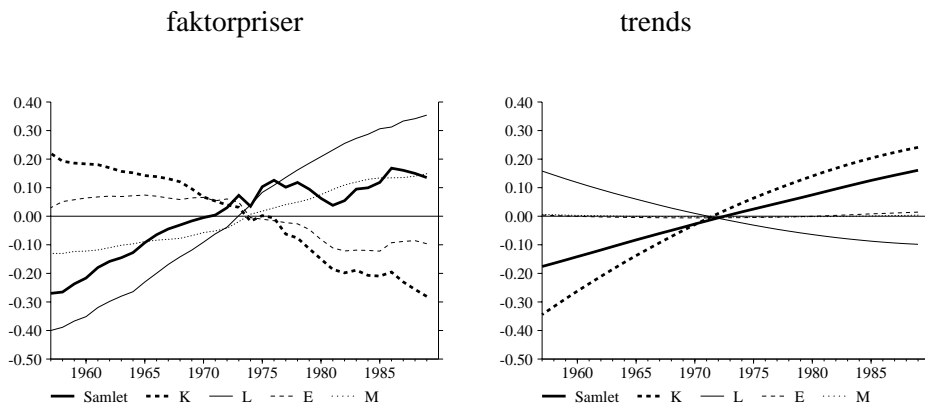
Dekomponeringen er foretaget ved at udnytte sammenhængene fra afsnit 4.2, hvor det demonstreredes, at den logaritmiske ændring i den afhængige variabel kunne skrives op som et lineært udtryk i en række logaritmiske ændringer i de forklarende variabler. Da det imidlertid kan være vanskeligt at se på grafer med relative ændringer, er det foretrukket at kumulere de årlige (logaritmiske) ændringer i bidragene, således at det ikke længere er den logaritmiske ændring i venstresidevariabler, som forklares, men i stedet (logaritmen til) variabelen selv i niveau.

Uden at det er meningen at gå alt for meget ind i, hvordan man laver dekomponeringer, er det dog væsentligt at fremhæve to ting, som gælder for de følgende grafer. (1) Alle serierne i graferne har gennemsnit lig nul. (2) Alle serierne eksklusive "Samlet" summer op til "Samlet". At bidragene summer op til det, de skal forklare, er naturligvis et evident krav, mens (1) blot er en bekvem konvention, som gør, at små bidrag vil ligge omkring nul-linjen. Men det er overordentligt vigtigt at huske på, at *niveauet* for de enkelte bidrag ikke giver mening i sig selv – det er kun *udviklingen* eller svingene i bidragene, man må fortolke på, og ikke de enkelte observationer. Således kan man ikke sige, at  $Y$  har bidraget med over 50% til størrelsen af kapitalapparatet i året 1989 i den følgende figur 7.10 (venstre), mens det er rigtigt at sige, at  $Y$  har bidraget med omkring 50% til udviklingen i kapitalapparatet igennem hele estimationsperioden.

Desuden skal man bemærke, at det er de optimale/langsigtede størrelser, som dekomponeres, således at kortsigtsdynamikken er "renset ud".

**Figur 7.10. Dekomponering af  $K$ -ligningen,  $K^*$  selv og  $K^*/Y$**

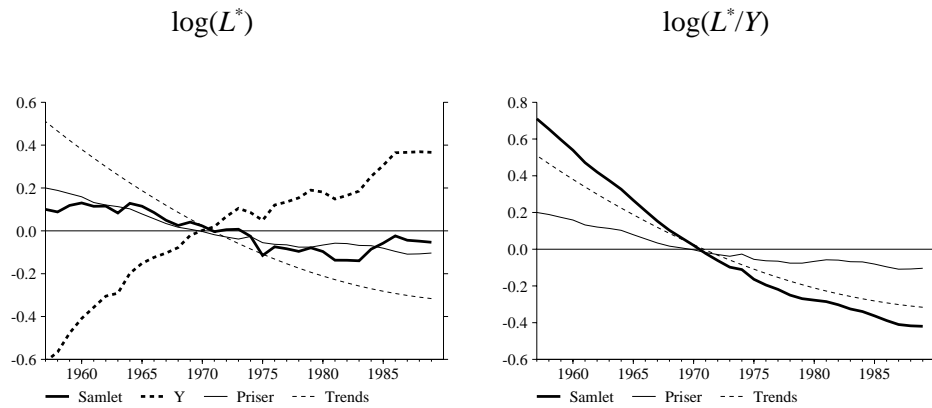
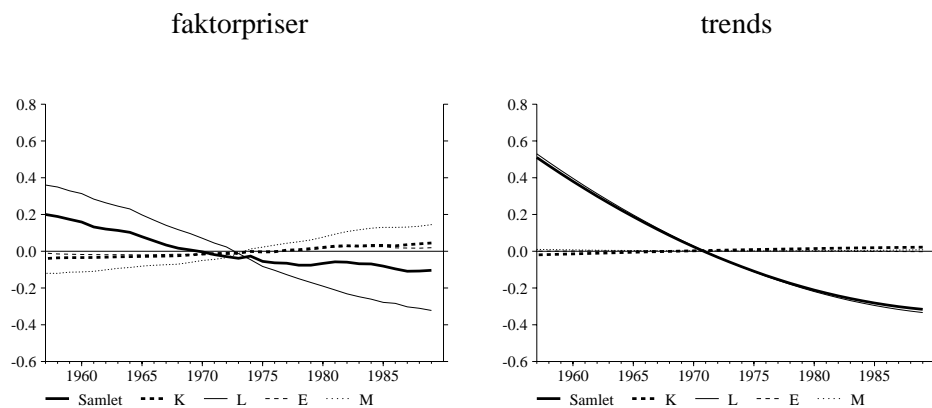


**Figur 7.11. Yderligere dekomponering af faktorpriser og trends i  $K$ -ligningen**

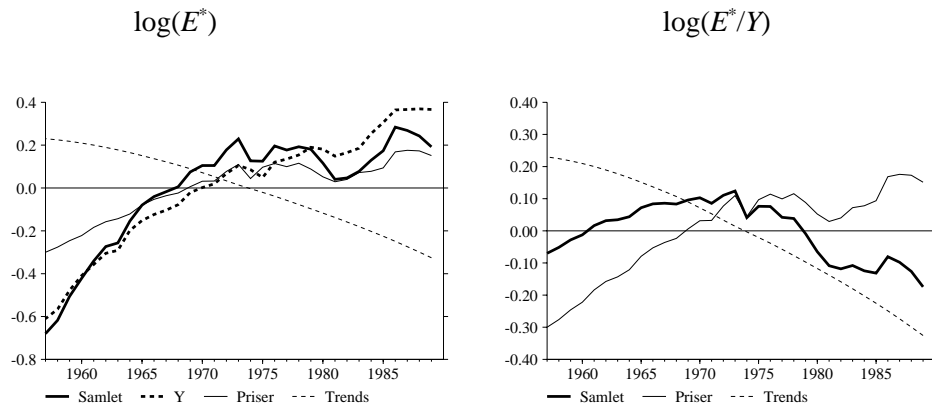
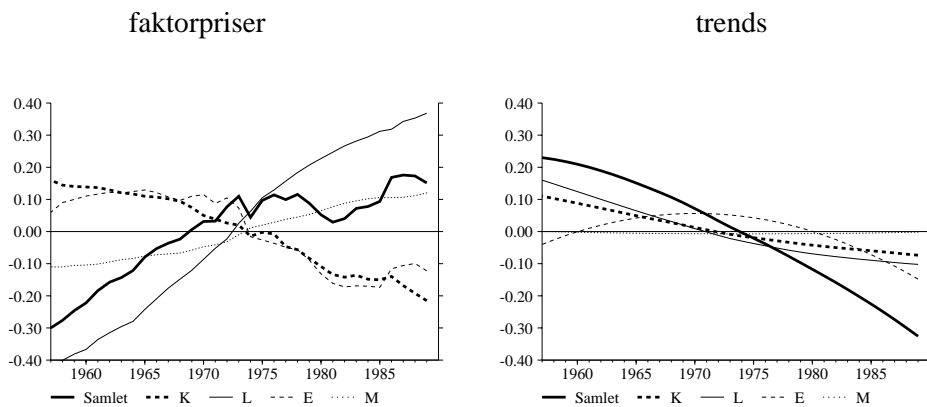
Som nævnt er det stigningen i  $Y$ , som trækker en meget stor del af stigningen i  $K$ , men der er en mer-stigning i  $K$  (dvs. et stigende  $K/Y$ -forhold), som produktionen alene ikke er i stand til at forklare. Dette  $K/Y$ -forhold ses i den højre del af figur 7.10, idet " $Y$ " i den venstre figur er trukket fra på "begge sider", således at "Samlet" (højre) = "Samlet" (venstre) - " $Y$ " (venstre). Af figuren ses det, at denne merstigning er på ca.  $0.30 - (-0.45) = 75\%$ , hvoraf de relative faktorpriser og trendene bidrager med godt halvdelen hver.

I figur 7.11. bliver faktorpriserne og trendene dekomponeret yderligere, og disse figurer beholder for overskuelighedens skyld de samme enheder på 2.-aksen som den højre del af figur 7.10. Det ses, at af de relative faktorpriser er det hovedsageligt lønnen (men også materialeprisen), som trækker  $K/Y$ -forholdet op, og stigningen i kapital- og energipriser er ikke nok til at modvirke dette. En anden måde at sige det på er, at *reallønnen* får lov at slå igennem på  $K/Y$ -forholdet, idet lønnen (som vi så i figur 7.2.) stiger kraftigere end de andre priser. De mere kortsigtede svingninger i bidraget fra faktorpriserne hidrører næsten udelukkende fra kapital- og energipriser, og det ses, at energiprisen ikke er uden betydning for udviklingen i  $K/Y$ -forholdet. Bidragene fra  $P_K$  og  $P_E$  ser mere korrelerede ud, end man måske umiddelbart ville forvente.

Det relativt store bidrag fra de tekniske fremskridt (eller rettere: tilbageskridt – idet de er faktorforbrugende) stammer overvejende fra faldet i  $K$ 's eget effektivitetsindeks, mens stigningen i  $L$ 's effektivitetsindeks modvirker tendensen lidt. En anden måde at sige det på er, at effektivitetsudviklingen i  $L$  gør det muligt at spare lidt på  $K$ , men det drukner i, at  $K$  selv bliver væsentligt mindre effektiv. Trendbidragene fra  $E$  og  $M$  er forsvindende.

**Figur 7.12. Dekomponering af  $L$ -ligningen,  $L^*$  selv og  $L^*/Y$** **Figur 7.13. Yderligere dekomponering af faktorpriser og trends i  $L$ -ligningen**

Den igennem perioden stigende (real)løn er altså med til at presse kapitalkvoten ( $K/Y$ ) opad, og man måtte derfor forvente, at denne udvikling i faktorpriserne preser  $L/Y$  forholdet nedad. Det er da også, hvad man ser i ovenstående figur 7.12 (højre), men her bemærkes det, at faktorpriserne kun forklarer godt en fjerdedel af faldet i  $L/Y$ -forholdet (eller: stigningen i arbejdsproduktiviteten,  $Y/L$ ). I figur 7.13 (venstre) kan vi se, at det er lønnen, som trækker  $L/Y$ -forholdet nedad, modvirket af materialeprisen og kun i meget ringe grad af prisen på kapitalapparatet. Det sidste kan måske undre, men det skyldes, at  $P_K$ 's virkning på  $L$  ( $e_{LK} = 0.05$ ) er meget mindre end  $P_L$ 's virkning på  $K$  ( $e_{KL} = 0.22$ ), som følge af at arbejdskraften har en noget større omkostningsandel ("vægt") end kapitalapparatet. Hvad de tekniske fremskridt angår, er det udviklingen i  $L$ 's eget effektivitetsindeks, som trækker det hele, og udviklingen i denne "arbejdseffektivitet" må siges at være en central mekanisme i systemet.

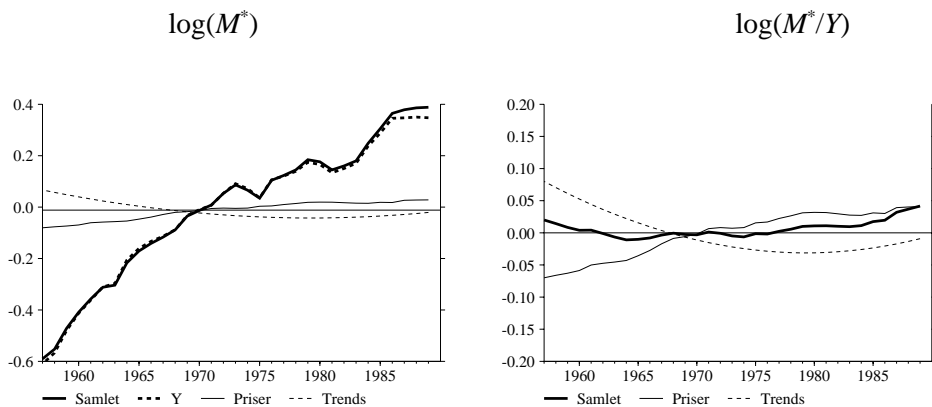
**Figur 7.14. Dekomponering af  $E$ -ligningen,  $E^*$  selv og  $E^*/Y$** **Figur 7.15. Yderligere dekomponering af faktorpriser og trends i  $E$ -ligningen**

Hvad energien angår, har  $E/Y$ -forholdet i den sidste del af perioden haft en faldende tendens, og da de relative priser som helhed har været til gunst for energiforbruget, overlades forklaringen af dette fald i  $E/Y$ -forholdet til de tekniske fremskridt. Hvad den mere langsigtede udvikling angår, er den helt dominerende faktorpris lønnen, som sammen med materialeprisen klart overdøver de modsatrettede effekter fra kapital- og energipriser. De mere kortsigtede svingninger i bidraget fra de relative priser kommer dog fra disse sidste, og energiprisstigningerne er her endnu tydeligere at se end i den tilsvarende figur for kapitalapparatet (oliekriserne ses i 1973/74 og i slutningen af 1970-erne, og olieprisfaldet ses i 1985/86).

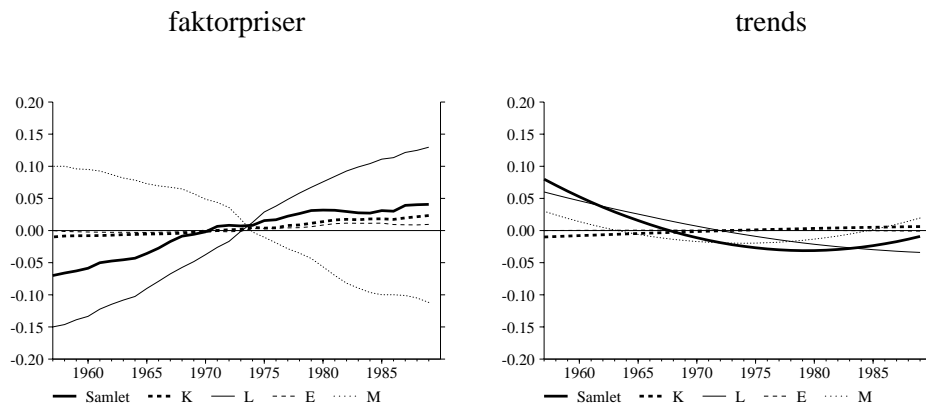
Mht. trendbidrag er billedet ikke så klart, men vi ser, at stigningen i  $L$ 's effektivitet og faldet i  $K$ 's effektivitet gør, at der spares på energien, mens udviklingen i energi-

ens egen effektivitet i starten af perioden er energiforbrugende, hvorefter den vender i starten af 1970'erne og bliver energibesparende. Dette sidste er vel en ret rimelig effekt, idet energi fra at være noget, man nærmest ikke skænkede en tanke, har udviklet sig til at være noget, man bekymrer sig om og gerne vil spare på – dels af miljøhensyn, men måske også i forventningen om, at energien kunne gå hen og blive meget dyr, som følge af miljøafgifter eller lignende tiltag.

**Figur 7.16. Dekomponering af  $M$ -ligningen,  $M^*$  selv og  $M^*/Y$**



**Figur 7.17. Yderligere dekomponering af faktorpriser og trends i  $M$ -ligningen**



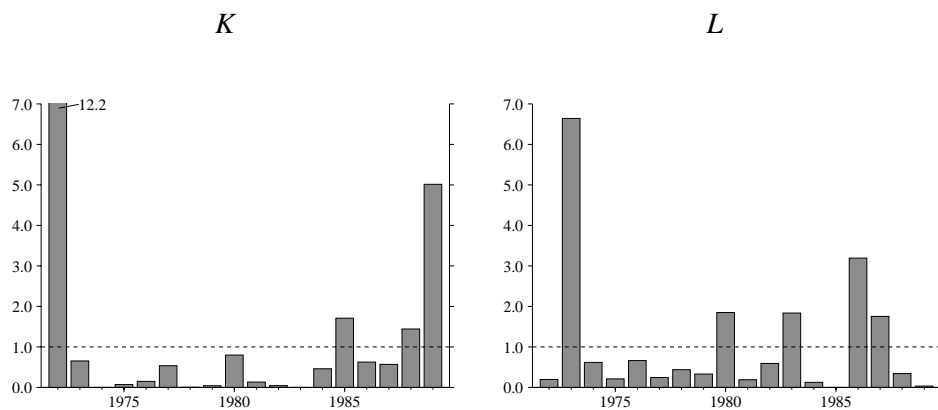
Materialekvoten er meget stabil og ændrer sig som det ses kun med omkring 5% i løbet af estimationsperioden. Virkningen fra faktorpriser og trends ophæver næsten hinanden, og man bør nok være på vagt over for multikollinearitet mellem de kvadratiske trends og materialeprisen. Bidragene er dog heldigvis ikke modsatte – specielt i slutningen af 1980-erne – og et kig på de næste figurer viser, at det

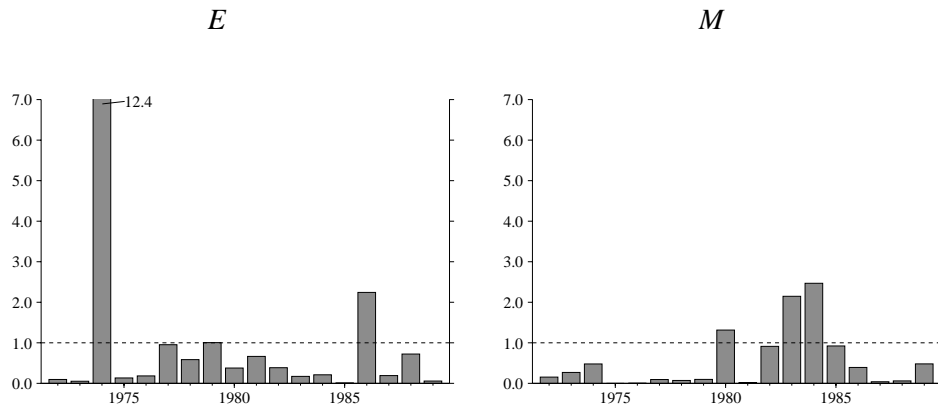
rent faktisk er udviklingen i arbejdskraftens effektivitet og pris, som bidrager mest til udviklingen i  $M/Y$ -forholdet. Således kan man sige, at det hovedsageligt er stigningen i  $L$ 's effektivitet og stigningen i  $P_L/P_M$  ("reallønnen"), som giver (den beskædne) variation i  $M/Y$ -forholdet. At  $K$ 's og  $E$ 's faktorpriser og effektivitetsudvikling ikke har den store effekt på materialeforbruget skal naturligvis ses i lyset af, at deres omkostningsandele er ret små i forhold til materialernes, jf. figur 7.3 side 86.

### 7.1.5. Parameterstabilitet

Da det er vigtigt at have en model med parametre, som er stabile over tiden, er der foretaget en rekursiv estimation, ved successivt at afkorte estimationsperioden fra højre. Men da der er tyve parametre i estimationen, vil det være for voldsomt at præsentere rekursive estimationer for dem alle her (disse kan i stedet betragtes i bilag D). Denne information kan imidlertid sammenkoges i den multivariate udgave af de normale Chow-tests for parameterstabilitet. For ligning  $i$  beregnes teststørrelsen i fx 1989 ved at dividere forudsigelsesfejlen i 1989 (givet parametrene i 1988) med ligning  $i$ 's spredning, estimeret til 1988. Dette tal kvadreres og vil være asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt med 1 frihedsgrad.

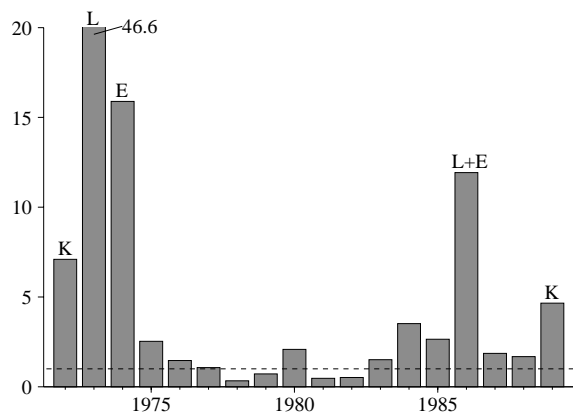
**Figur 7.18. Test for parameterstabilitet i de fire ligninger, normeret med 5% kritisk værdi**





Det mest iøjnefaldende er, at  $K$ -ligningen overraskes over observationerne i 1972 og 1989, at  $L$ -ligningen overraskes i 1973, og at  $E$ -ligningen overraskes i 1974. De fire tests kan også koges sammen i et samlet test for parameterstabilitet, som tager hensyn til kovariansen mellem restleddene i de fire ligninger, og som vil være asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt med 4 frihedsgrader.<sup>41</sup>

**Figur 7.19. Simultant test for parameterstabilitet, normeret med 5% kritisk værdi**



Der er store problemer i årene 1972-74, samt 1986 og 1989, og er man meget formelt anlagt, må man sige, at modellen bryder sammen i disse år. Kigger man

<sup>41</sup>Teststørrelsen fås som  $u'\Omega^{-1}u$ , hvor  $u$  er en  $4 \times 1$  søjlevektor med en-periode forecastfejl, og hvor  $\Omega$  er en  $4 \times 4$  (estimeret) kovariansmatrix for residualerne. Hvis  $\Omega$  er diagonal, svarer det simultane test til at lægge de fire tidligere viste teststørrelser sammen. Se evt. Lütkepohl (1991) side 159.



imidlertid på de enkelte parametre i bilag D, ser det dog ikke katastrofalt ud, omend nogle af parametrene har en tendens til at "drive" med tiden. Der må således siges at være god grund til at se nærmere på, om parametrene kunne gøres mere stabile, men på den anden side må man også holde fast i, at det ikke er sådan, at parametrene svinger helt ukontrollabelt eller skifter fortegn hele tiden.

### 7.1.6. Sammenfattende om estimationen

Hvis man skal sammenfatte estimationsresultatet på punktform, kan man sige følgende:

- Der er problemer med systematik i residualerne.
- Parametrene kunne være mere stabile.
- Priselasticiteterne er forholdsvis små og i hvert fald et godt stykke fra Cobb-Douglas.
- Kapital og energi er komplementære, som det ofte ses i empiriske studier. Vi er ikke langt fra en  $((KE)L)M$ - eller  $((K-E)L)M$ -nestning, svarende til at kapital og energi reagerer ens på løn- og materialepriser og muligvis er helt komplementære (således at  $K/E$ -forholdet ikke påvirkes af  $P_K/P_E$ ).
- Effektivitetstrendene forklarer godt halvdelen af stigningen i  $K/Y$ -forholdet og godt tre fjerdedele af faldet i  $L/Y$ -forholdet. Der er desuden en tendens til stigning i energiens effektivitetsudvikling.
- En partiel tilpasningsmodel ser ud til at være lidt for restriktiv, idet der er en tendens til, at kapitaltilpasningen foregår med to lige store "trin" i første og andet år (37% det første år og ekstra 37% det andet år), mens arbejdskraften efter en initial reaktion på 84% det første år "siver" noget langsommere mod ligevægten.
- Materialeforbruget ser ikke ud til at bidrage særligt meget til forklaringen af udviklingen i de andre faktorer, men med en kortsigtet produktionselasticitet på over én, fungerer  $M$  på den anden side som en slags stødpude, som gør det muligt at have træghed i både  $K$  og  $L$  og stadigvæk ligge "på produktionsfunktionen". Om denne overshooting er noget, vi så at sige pådutter materialerne for at kunne holde arbejdskraften træg, er så en anden sag, som vil blive diskuteret i afsnit 7.3.

Det er muligvis skuffende, at kun en fjerdedel af stigningen i arbejdstimeproduktiviteten ( $Y/L$ -forholdet) kan forklares af de relative priser (dvs. af det stigende  $K/Y$ -forhold), og man kunne spørge sig selv, om den ret fri formulering af effektivitetstrendene er så fri, at den får lov at stjæle unødigt meget af faktorprisernes forklaringskraft. Desuden er energien egenpriselasticitet måske også en anelse lav (nogle vil mene, at den bør være mindst  $-0.20$ ), men her skal man dog bl.a. huske på, at det meget energitunge erhverv: "Anden transport end søtransport mv." er

med, og det er notorisk vanskeligt at estimere fornuftige energipriselasticiteter på dette erhverv, som bl.a. indeholder DSB.

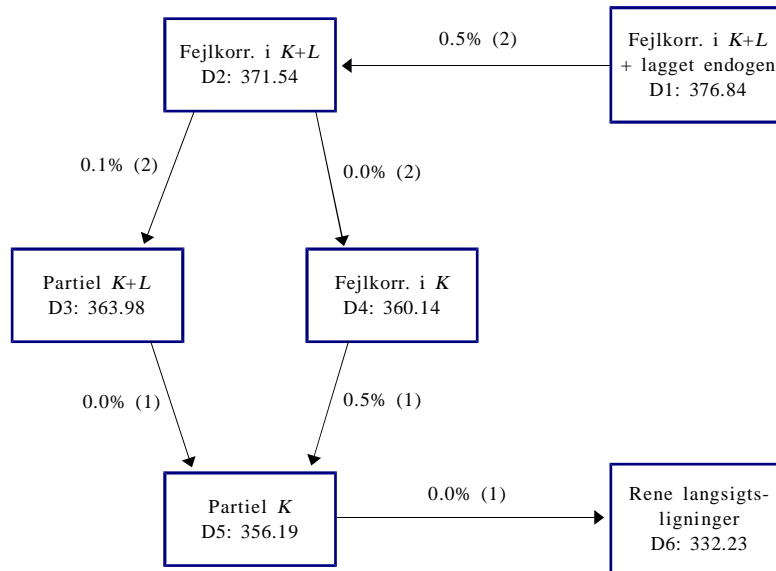
## 7.2. Tests af forskellige hypoteser

I dette afsnit testes som nævnt i kapitlets indledning en række forskellige hypoteser vedr. kortsigtsdynamik, nestningsstruktur og trends. Disse tests vil være samlet sammen i testtræer, hvor man kan se likelihoodværdierne, men hvor man ikke kan se, hvordan den estimerede relation ellers ser ud. Det er der rådet bod på i bilag E, hvor alle estimationerne er gengivet som i det tidligere viste skema.

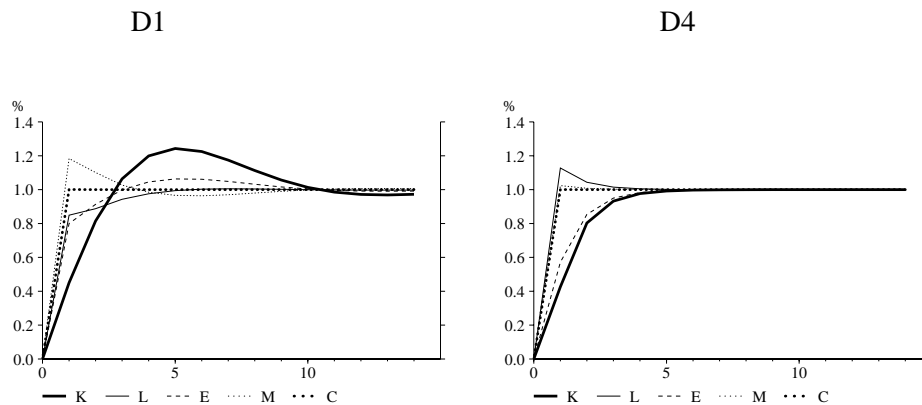
### Kortsigtsdynamik

Vi begynder med at teste kortsigtsdynamikken, idet det er væsentligt at have denne nogenlunde på plads, før man giver sig til at lægge restriktioner på langsigtsparemetrene. Det første, der prøves er, om der er plads til (den logaritmiske ændring) i den laggede endogene i de to ligninger for  $K$  og  $L$ . Herudover forsøges det dels at gøre  $L$  fleksibel og dels at gøre tilpasningsprocessen rent partiel. Og til sidst estimeres rene langsigtsligninger, svarende til at alle  $\lambda$ 'erne sættes lig én.

**Figur 7.20. Test af kortsigtsdynamik**



Testtræet læser som følger. I hver kasse er det kort beskrevet, hvad hypotesen går ud på, og under dette ses dels hypotesens nummer (fx D1), samt den tilhørende log-likelihoodværdi. Mellem kasserne løber nogle pile, hvor signifikanssandsynligheden for hypotesen er angivet, og hvor antallet af bundne parametre ses i parentes. Fx bindes to parametre mellem D1 og D2, således at vi skal finde sandsynligheden for at observere et tal, som er større end eller lig  $2 \cdot (376.84 - 371.54) = 10.60$  i en  $\chi^2$ -fordeling med to frihedsgrader. Denne sandsynlighed er 0.5%, hvorfor hypotesen må afvises på et 5%-niveau. Som nævnt kan man se estimationerne i bilag E.

**Figur 7.21. Effekt af en forøgelse af produktionen med én procent i D1 og D4**

Den tidligere viste estimation (tabel 7.1) hedder her D2. I D1 introduceres den laggede endogene i tilpasningsligningerne (dvs.  $D\log(X_i(-1))$ ), og mens denne ikke betyder noget for  $L$ -ligningen, kommer den til gengæld kommer signifikant ind med en koefficient på 0.59 i  $K$ -ligningen. Det foranlediger svingninger kapitaltilpasningen (og dermed også i de andre faktorer), samtidig med, at det halverer  $K$ 's egenpriselasticitet. Så på trods af forbedrede  $DW$ -størrelser, må denne overshooting siges at være uantagelig, i hvert fald hvis man forestiller sig, at trægheder i kapitalapparatet skulle være forårsaget af tilpasningsomkostninger.<sup>42</sup>

Hvis vi lader  $L$  være fleksibel (figur 7.21, højre), ses det, at det nu er arbejdskraften i stedet for materialerne, som kompenserer for det træge kapitalapparat. Dette må imidlertid afvises på endog meget høje testniveauer, og vi får således bekræftet den solide empiriske kendsgerning, at der er såkaldt "labour-hoarding" i arbejdskraften, jf. fx ADAMs beskæftigelsesligninger (Danmarks Statistik (1993) side 109). Det kan afvises, at  $K$  og  $L$  tilpasser sig rent partielt, og hypotese D6 er interessant, fordi den viser, hvordan estimationen ville se ud, hvis vi estimerede rene langsigtsligninger, svarende til første trin af Engle/Grangers tottrinsmetode. Et kig i tabel D6 i bilag E side 137 viser, at det reducerer elasticiteterne betragteligt, idet der er tale om en halvering mange steder. Det må derfor konkluderes, at i dette konkrete tilfælde, hvor der ikke er så forfærdeligt mange observationer, er det betænkeligt at estimere rene langsigtsligninger.

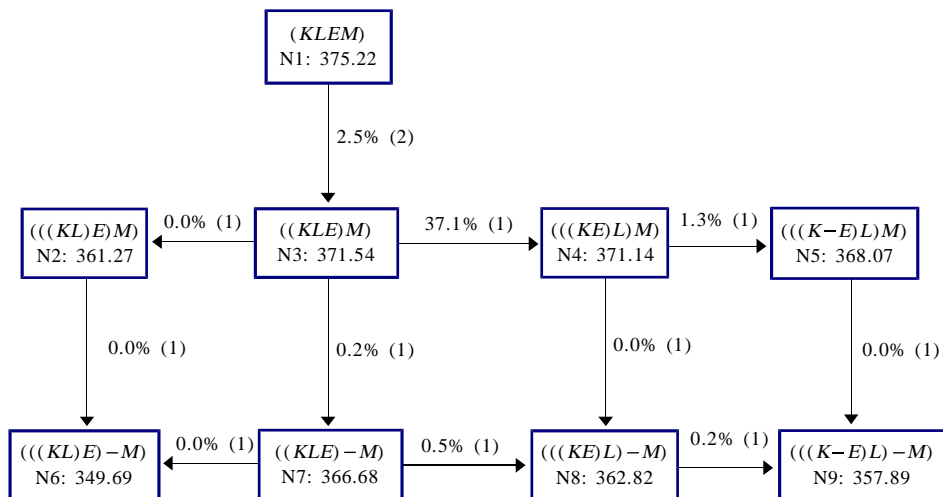
<sup>42</sup>At den laggede endogene gerne vil ind i kapitalligningen, kendes fra andengenerationsestimationer i modelgruppen på Danmarks Statistik. Fænomenet ses også hos From (1994).

Da D1 må siges at have uacceptable egenskaber, og da vi ikke kan simplificere D2 (den i tabel 7.1 viste estimation) uden at øve vold på modellens evne til at beskrive data, beholdes  $K$  og  $L$  som hidtil træge og formuleret som fejlkorrigeringsligninger.

### Separabilitet

Vi beholder altså kortsigtsdynamikken fuldstændigt som hidtil, og i det følgende vil vi så se på en række forskellige hypoteser angående langsigtsparementrene.

**Figur 7.22. Test af nestningsstruktur**



Den tidligere viste estimation (tabel 7.1 eller D2) er her at finde som hypotese N3, og det ses, at materialerne lige akkurat ikke kan separeres ud (signifikanssandsynlighed = 2.5%), uden at vi dog er langt fra at kunne. Denne helt frie estimation (N1) er gengivet i nedenstående tabel:

**Tabel 7.2. (N1). (KLEM)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.26	0.19	-0.07	0.14	-4.0%	-1.1%	0.41	0.64	1.1%	1.19	9.7
<i>L</i>	0.05	-0.31	-0.01	0.27	4.9%	1.2%	0.79	0.54	1.3%	1.66	2.5
<i>E</i>	-0.27	-0.10	-0.17	0.54	-2.7%	2.8%	•	•	3.5%	1.40	0.9
<i>M</i>	0.02	0.17	0.02	-0.21	1.0%	-0.7%	•	•	1.0%	1.22	0.6

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 375.22

Det bemærkes her, at *L*-ligningen i forhold til den mere restriktive ((*KEL*)*M*)-nestning forbedres fra at have en spredning på 1.5% til 1.3%, og at arbejdskraftens egenpriselasticitet vokser fra -0.21 til -0.31. Til gengæld bliver også *L* og *E* komplementære, mens der bliver en meget kraftig substitution mellem *E* og *M*. Fortolkningen af disse ting er noget vanskelig, og for at lette fortolkningerne beholdes ((*KLE*)*M*)-nestningen i det følgende, idet den som nævnt ikke er i åbenlys modstrid med data.

Til gengæld er det statistisk set ikke muligt fra en ((*KLE*)*M*)-nestningsstruktur at separere *E* ud i et næstyderste nest, så vi får en (((*KL*)*E*)*M*)-nestningsstruktur (N2).

**Tabel 7.3 (N2). ((KL)E)M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.27	0.06	-0.01	0.22	-4.3%	-0.7%	0.39	0.38	1.8%	0.53	0.4
<i>L</i>	0.01	-0.22	-0.01	0.22	5.4%	1.0%	0.85	0.48	1.4%	1.68	2.1
<i>E</i>	-0.02	-0.09	-0.10	0.22	-2.1%	2.9%	•	•	3.1%	1.80	0.4
<i>M</i>	0.03	0.14	0.01	-0.18	0.8%	-0.7%	•	•	1.0%	1.04	0.3

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 361.27

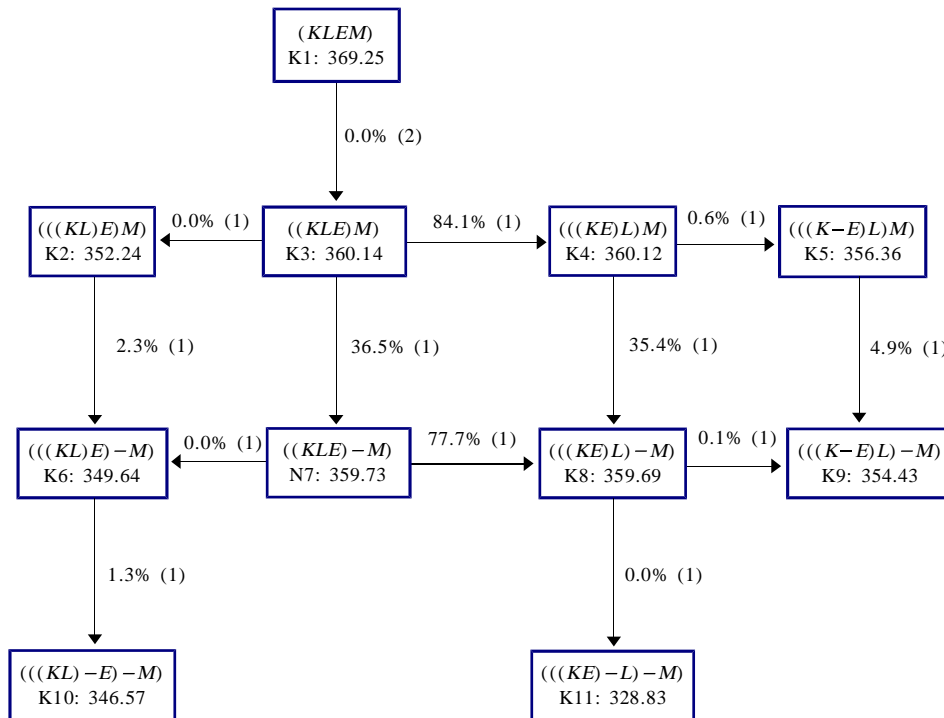
Denne nestningsstruktur kan afvises på høje testniveauer, og det ses af tabellen, at det er *K*-ligningen, det går ud over, idet spredningen stiger fra 1.1% til 1.8% (og DW-størrelsen falder helt ned til ca. 0.5). Man må derfor sige, at energien (og energipriserne) er af væsentlig betydning for kapitalapparatet, hvilket dekomponeringen af *K*-ligningen også indicerede.

Til gengæld er det lige til at lægge en (((*KE*)*L*)*M*)-nestningsstruktur (N4) på modellen, hvilket selvfølgelig skyldes, at  $e_{KL}$  og  $e_{EL}$  allerede er næsten ens i ((*KLE*)*M*)-

nestningen (N3). I N5 er det så testet, om  $K$  og  $E$  er 100% komplementære, således at prisen på  $K$  og  $E$  overhovedet ikke påvirker  $K/E$ -forholdet (svarende til helt firkantede isokvanter/fast forhold mellem  $K$  og  $E$ ). Rent faktisk er vi ikke forfærdeligt langt fra at kunne neste med  $((K-E)L)M$ -struktur.

Statistisk set lader det sig ikke gøre at separere materialerne helt ud, svarende til at  $M$  er rent i-o bestemt (dog med trends i denne i-o-koefficient). Separeres materialerne helt ud i  $((KLE)M)$ -nestningen – hvilket skrives som  $((KLE)-M)$  (N7) – stiger spredningen i  $L$ -ligningen fra 1.5% til 2.1%, mens spredningen i  $E$ -ligningen stiger fra 4.0% til 4.7%. I bilag E kan man se, at tilpasningshastigheden for  $L$  er næsten én (de to  $\lambda$ 'er i  $L$  er begge lig 0.98), således at i-o-bestemmelsen af materialerne i realiteten tvinger  $L$  til at være fleksibel, idet det ellers ville være  $E$ , som skulle kompensere for både  $K$  og  $L$ , hvilket ville se helt urimeligt ud, som følge af energiens meget lille omkostningsandel.

Hvis kun  $K$  tillades træg (og  $L$  er fleksibel), svarende til D4 i figur 7.20, kan vi teste endnu længere ned, som vist i følgende figur (hvor K3 altså svarer til D4 i figur 7.20):

**Figur 7.23. Test af nestningsstruktur med kun  $K$  træ**

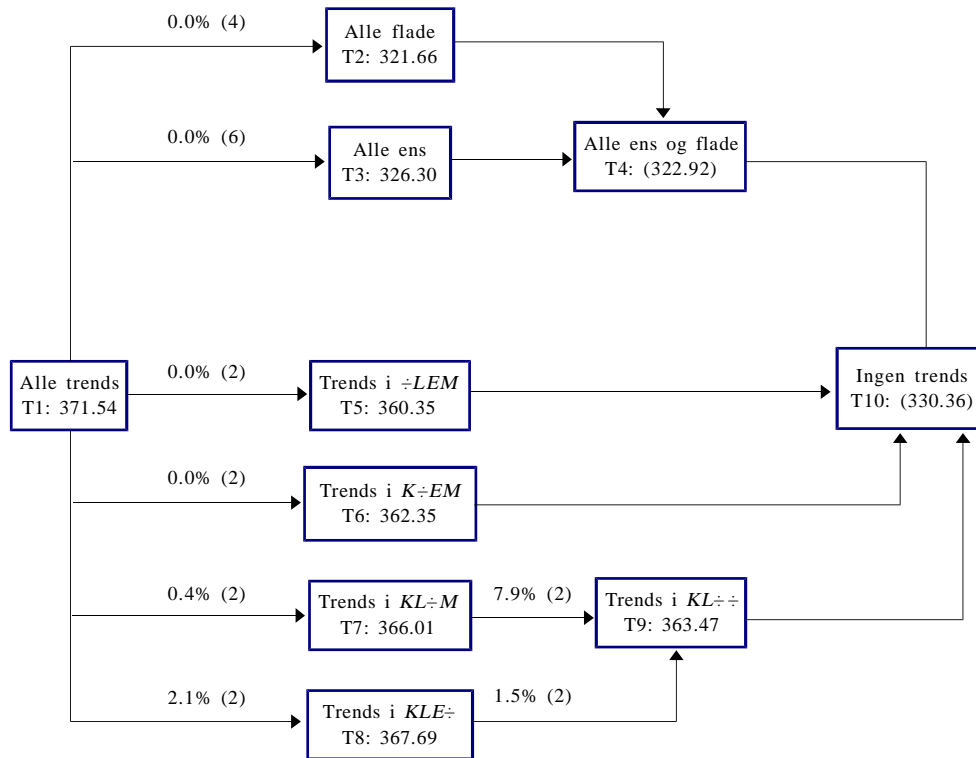
Som følge af, at  $L$  er fleksibel, betyder det ikke længere så meget at separere  $M$  helt ud. Af interesse er det at se, at givet at vi pålægger nestningsstrukturen  $((((KL)E)M)$  (K2), kan vi uden de helt store problemer godt i-o-bestemme både  $E$  og  $M$  (K6 og K10). Dette er strategien, hvad faktorblokken i den næste version af ADAM angår, og vi ser her, at det store tab i forklaringsgrad sker ved at gå fra  $((KLE)M)$  til  $((((KL)E)M)$  (K3 til K2).

### Trends

Eftersom de tekniske fremskridt er blevet formuleret relativt frit, er det meget interessant at få undersøgt, hvad der sker, hvis der lægges bånd på disse.



Figur 7.24. Test af trends



Det første, som kunne være interessant, var at gøre vækstraterne i de fire effektivitetsindeks uafhængige af tiden. Det gøres ved at sætte  $\bar{\omega}_i$  til nul i alle fire ligninger, således at leddet med tiden i anden forsvinder. Dette ses i figuren som hypotese T2 og også i tabellen nedenfor:

Tabel 7.4. (T2). Alle flade

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.31	0.25	-0.08	0.13	-2.5%	-2.5%	0.33	0.53	1.1%	1.15	4.6
<i>L</i>	0.07	-0.23	0.02	0.13	3.3%	3.3%	0.74	0.50	2.7%	0.50	0.5
<i>E</i>	-0.32	0.31	-0.12	0.13	0.5%	0.5%	•	•	4.4%	0.89	0.7
<i>M</i>	0.02	0.08	0.01	-0.11	0.1%	0.1%	•	•	3.3%	0.15	2.7

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 321.66

Det kan klart afvises, at denne restriktion kan lægges på, men det er ikke det egentligt interessante. Det interessante er, at restriktionen overhovedet ikke ændrer de langsigtede priselasticiteter, men kun hæver spredningen i  $L$ -ligningen fra 1.5% til 2.7% og i  $M$ -ligningen fra 1.0% til hele 3.3% og gør DW-størrelsen i  $M$ -ligningen helt uantagelig.  $\bar{\omega}_i$ -erne må derfor være ret ukorrelerede med langsigtsparametrene ( $\beta$ 'erne), hvilket er beroligende, fordi man som tidligere nævnt kunne have frygtet, at tiden i anden ville have en tendens til at stjæle forklaringskraft fra priselasticiteterne.

I hypotese T3 testes, om de tekniske fremskridt kunne tænkes at være Hicks-neutrale, således at de ikke vrider faktorforholdene. Hicks-neutralitet må imidlertid afvises klart. I T4 forsøges det at nøjes med én trendparameter, svarende til at trenden i T3 gøres flad. Dette resulterer imidlertid i, at tilpasningshastigheden  $\lambda_2$  i  $L$ -ligningen bliver så lav som 0.05, således at vi i estimationsperioden får helt absurde afvigelser mellem  $L$  og  $L^*$ . Det samme gør sig gældende med T10, hvor alle trends fjernes, og i begge tilfælde er likelihoodværdien derfor sat i parentes.<sup>43</sup>

I T5-T8 forsøges det at fjerne effektivitetsudviklingen i faktorerne, en ad gangen. T5 svarer således til et test for Harrod-neutralitet, mens T6 svarer til et test for Solow-neutralitet. Begge hypoteser kan klart afvises, mens det ser lidt mere rimeligt ud at undvære trendene i  $E$ - og (specielt)  $M$ -ligningen. I T9 fjernes trendene i begge disse to ligninger, men som det ses nedenfor, stiger spredningen i  $K$ -ligningen så fra 1.1% til 1.5%, og et kig i T7 og T8 i bilag E viser, at dette er forårsaget af, at trenden i  $E$  fjernes.<sup>44</sup>

---

<sup>43</sup>Vi ser det ubehagelige, at likelihoodværdien *stiger* fra T2 til T4 og igen fra T4 til T10. Dette fænomen er imidlertid ikke ukendt fra ikke-lineær estimation af fejlkorrigeringsmodeller: at estimationsproceduren kan finde en *bedre* (målt på likelihoodværdien) løsning, hvis en eller flere af tilpasningsparametrene bliver næsten nul. Det er naturligvis generende, men i praksis er det nemt at opdage sådanne problemer ved at se på, om de optimale/langsigtede størrelser bevæger sig urimeligt langt væk fra de observerede størrelser, svarende til at der er totalt fravær af "kointegration".

<sup>44</sup>Jeg har haft problemer med at finde ud af, hvad der er den rette generalisation af Harrod- hhv. Solowneutralitet med mere en to produktionsfaktorer. I Hacche (1979) generaliseres Harrod- og Solowneutralitet som her, men det skal dog nævnes, at Chambers (1988) mener, at trendene i  $E$  og  $M$  også skal fjernes.

**Tabel 7.5. (T9). Trends i  $KL$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$s$	DW	JB
$K$	-0.51	0.40	-0.13	0.23	-2.5%	-3.5%	0.30	0.37	1.5%	0.95	0.2
$L$	0.11	-0.37	0.03	0.23	6.1%	0.7%	0.71	0.23	1.4%	1.85	0.5
$E$	-0.51	0.45	-0.18	0.23	0%	0%	•	•	4.1%	1.06	0.8
$M$	0.04	0.15	0.01	-0.19	0%	0%	•	•	1.1%	1.10	0.1

Anm.  $n = 1957-89$ . Log likelihood = 363.47

### 7.3. Udbygningsmuligheder

Undersøgelsen i afsnit 7.1 kan sammenfattes som, at vi har en relation, som – givet at den er teoretisk konsistent også på kort sigt – ser rimeligt fornuftig ud. Som vist er der imidlertid problemer med parameterstabiliteten og med systematik i residualerne – alt sammen en indikation af, at der er et ganske stort finpudsningsarbejde tilbage, før man ville kunne godtage den til prognoseformål eller til indbygning i en makroøkonomisk model som fx ADAM.

Det ville være oplagt at forsøge med "produktivitetstrapper"; dvs. bygge diskrete hop ind i nogle af effektivitetsindeksene, og hvis man kigger på residualmønsteret, ser der specielt ud til at ske "noget" omkring den første oliekrise i 1973/74. Af andre effekter, som kunne være interessante, kunne man overveje følgende:

- (1) At tilpasningen i  $L$  ikke er træg i antal *timer*, men i antal *hoveder*.
- (2) At  $L$  bliver mere effektiv, når produktionen stiger.
- (3) At  $E$  bliver mindre effektiv (der bruges mere), når det er koldt.

Punkt (1) er en interessant hypotese, fordi omkostningerne ved at ændre på arbejdskraften formentligt knytter sig til den enkelte person, og ikke så meget til de arbejdstimer, han eller hun præsterer. En anden måde at sige det på er, at hvis produktionen falder med 1% og arbejdstiden *samtidig* reduceres med 1%, vil arbejdskraften målt i timer ( $L$ ) være fuldt fleksibel, idet et tilsvarende 1% fald i  $L$  ikke giver bevægelse i antallet af ansatte (men blot i, hvor mange timer de arbejder). (2) er interessant, fordi man godt kan forestille sig, at de ansatte i en virksomhed på kort sigt er lidt mere effektive, hvis afsætningen forøges og tilsvarende slapper lidt af, hvis ordrebogen er tom. (3) giver sig selv, idet en kold vinter kræver et større energiforbrug for at holde den samme temperatur i lokalerne, svarende til at energien på en måde er blevet mindre "effektiv".

Disse tre effekter er meget enkle at bygge ind i modellen. Den første modelleres ved at udnytte, at arbejdstimeforbruget,  $L$ , fremkommer som identiteten  $L = H \cdot Q$ , hvor  $H$  er den årlige gennemsnitlige arbejdstid (i antal timer), og hvor  $Q$  er beskæftigelsen målt i antal hoveder. Vha. identiteten er let at regne ud, at fejlkorrektionsligningen med tilpasning i hoveder,

$$\text{Dlog}(Q) = \lambda_1 \text{Dlog}(Q^*) + \lambda_2 [\text{log}(Q^*(-1)) - \text{log}(Q(-1))], \quad (7.9)$$

giver følgende modifikation af den tidligere benyttede tilpasningsligning for  $L$ :

$$\text{Dlog}(L) = \lambda_1 \text{Dlog}(L^*) + \lambda_2 [\text{log}(L^*(-1)) - \text{log}(L(-1))] + (1-\lambda_1) \text{Dlog}(H). \quad (7.10)$$

Hvad (2) angår, bygges produktionen ind i  $L$ 's effektivitetsindeks, således at en 1% ændring i produktionen får  $L$ 's effektivitetsindeks til at stige med  $\omega^{\text{timeeff}}$ %. På samme måde får en forøgelse af antallet af frostdøgn på 1%  $E$ 's effektivitetsindeks til at stige med  $\omega^{\text{frost}}$ % ( $\omega^{\text{frost}}$  er negativ). Nedenfor vises en estimation med effekterne (1)-(3).

**Tabel 7.6. Estimation som tabel 7.1, men med modifikationerne (1)-(3) ovenfor**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$s$	DW	JB
$K$	-0.28	0.24	-0.07	0.11	-3.7%	-1.3%	0.35	0.57	1.1%	1.14	6.6
$L$	0.06	-0.18	0.02	0.11	5.8%	0.9%	0.70	0.42	1.2%	1.19	1.3
$E$	-0.28	0.30	-0.13	0.11	-1.2%	2.3%	•	•	3.8%	0.98	2.3
$M$	0.02	0.07	0.00	-0.09	0.4%	-0.5%	•	•	1.0%	0.86	0.3

Anm.  $n = 1957-89$ . Log likelihood = 382.57  $\omega^{\text{timeeff}} = 0.084$   $\omega^{\text{frost}} = -0.064$

Den væsentligste effekt er, at den ny formulering af arbejdskrafttilpasningen reducerer spredningen i denne ligning fra 1.5% til 1.2%, bl.a. fordi det lykkes at fange noget af outlieren i 1973. Frostdøgnene kommer signifikant ind og reducerer spredningen i energiligningen fra 4.0% til 3.8%, mens timeeffektivitetseffekten er beskeden og insignifikant. Hvad det sidste angår, er der imidlertid store forskelle erhvervene imellem, idet effekten i visse erhverv kan være ganske stor. Desværre pynker effekterne (1)-(3) ikke på autokorrelationen.

Det ville være interessant at se nærmere på forventningsdannelsen og måske forsøge at bygge nogle af resultaterne fra kapitel 6 ind i modellen. Man *kunne* således forsøge med perfekt forudseenhed ved at lade leadede værdier af produktion og faktorpriser bestemme  $K^*$  og  $L^*$  nogle perioder frem, og så operere med disse i sine tilpasningsligninger, som skitseret i kapitel 6. Og hvis man indskrænker sig til at

lade virksomhederne se et par perioder frem, skulle der ikke være noget galt i at bruge foreløbige nationalregnskabstal for produktion og faktorpriser, så man slipper for at afkorte estimationsperioden "fra højre". Noget andet er så de tekniske vanskeligheder, det i modelsammenhæng giver at operere med perfekt forudseenhed, men diskussionen af dette ligger uden for denne opgaves rammer.

En ting, som også kunne være interessant, ville være at lade arbejdskraftens effektivitet afhænge af "presset" på denne, i stedet for af produktionen. Dette pres kunne man modellere som  $L/L^*$ ; dvs. det gab der er mellem den for virksomheden optimale beskæftigelse og den faktiske beskæftigelse, som ikke er fuldt tilpasset fx som følge af tilpasningsomkostninger. Man kunne således sige, at hvis  $L/L^*$  er mindre end én (der er "mangel" på arbejdskraft), bliver arbejdskraften mere effektiv og vice versa. På den måde, ville man gøre materialernes kortsigtede produktionselasticitet mere fri, fordi arbejds effektiviteten ville kunne overtage (noget af) materialernes rolle som garant for, at vi "er på produktionsfunktionen" på kort sigt. Denne beskrivelse er muligvis mere præcis end at lade arbejdskrafteffektiviteten være produktionsafhængig, men desværre er den ikke let at implementere, fordi  $L$ 's effektivitetsindeks indgår i  $L^*$  selv, hvorved vi får et simultant problem.

En sidste mulighed, som bl.a. er nævnt i From (1994), kunne være at lade virksomhederne reagere mere valent på en eksportfremgang, end på forøget indenlandsk efterspørgsel, idet virksomhederne er mere usikre på en eksportstigning, fordi den bl.a. er afhængig af valutaforholdene.

## 8. Konklusion

Jeg vil ikke her foretage en længere sammenfatning, idet en sådan vil kunne findes i resumeet foran i opgaven. I stedet vil jeg forsøge at konkludere de vigtigste resultater så kortfattet som muligt.

I opgaven er det blevet vist, at det rent faktisk godt kan lade sig gøre at estimere såkaldte tredje-generationsmodeller og samtidig få noget fortolkeligt ud af det. Det vises, at både kapitalapparatet og arbejdskraften er træge på kort sigt, og der angives en model, som kan håndtere dette på konsistent vis uden at blive så indviklet, at den ikke kan overskues. Det er desuden blevet vist, at GLO-funktionen – givet den beskedne faktorsubstitution, som tilsyneladende ligger i tallene – er særdeles anvendelig og bekvem at arbejde med; også hvad nestningsstrukturer angår.

Der er i opgaven angivet en alternativ måde at operere med træge produktionsfaktorer på end den traditionelle, og denne nye tilgang ser lovende ud, idet man så at sige "holder fast" i langsigtsligningerne – langsigtsligninger, hvis egenskaber man ofte har et detaljeret kendskab til på forhånd. Med den traditionelle tilgang (kortsigtsomkostningsfunktioner – "restricted cost functions") ændres langsigtsligningerne derimod substantielt, og der advares derfor mod at bruge denne tilgang for GLO- og translogfunktionen, hvis der er tale om beskeden faktorsubstitution.

I opgaven angives nogle enkle approksimationer, med hvilke man kan approksimere effekten af trægheden i de træge produktionsfaktorer på de fleksible produktionsfaktorer. Disse approksimationer vil være anvendelige i de tilfælde, hvor man ikke analytisk kan udlede kortsigtsfaktorefterspørgsler fra langsigtsligningerne, hvilket fx gælder for firefaktor nestet CES og for translog.

Hvad de tekniske fremskridt (trends) angår, ser den anvendte tilgang med disembodied faktorudvidende fremskridt lovende ud, dels fordi den gør det muligt at spore de tekniske fremskridt helt tilbage til de enkelte produktionsfaktorer, og dels fordi den gør sammenligninger mellem forskellige funktionsformer lettere. Således er det lettere at forholde sig til, at en produktionsfaktor bliver et antal procent mere effektiv pr. år, end det er at forholde sig til, at faktorens i-o koefficient eller omkostningsandel reduceres med et antal procent pr. år.

## Litteratur

I litteraturlisten er kun medtaget litteratur, som jeg har fundet direkte anvendelig i forbindelse med opgaven. Der er imidlertid skrevet overordentligt meget om emnet, og et godt sted at starte er måske de to artikler fra *Handbook of Econometrics*, som er nævnt sidst i indledningen. En mere pædagogisk, men knapt så detaljeret indføring er at finde i lærebogen Heathfield/Wibe (1987), som også har en god litteraturliste. En indføring i moderne produktionsteori (og en udførlig litteraturliste) kan findes i lærebogen Chambers (1988), omend den er noget vanskeligere end Heathfield/Wibe.

*[Se her! (kopi af kommentaren i forordet): Med hensyn til en decideret "læseplan" for læsere, som vil sætte sig ind i faktorefterspørgsel fra bunden af, vil jeg henvise til bilaget i working paper 1998:1, hvori en sådan er givet. Min eneste kommentar til dette er, at det vil være bedre at læse Thomsen (2000) end working paper 1998:2, da førstnævnte er en forbedret udgave af sidstnævnte (dette gælder særligt indledningen, som er helt omskrevet). -Thomas Thomsen, august 1999]*

Arrow, K. J., H. B. Chenery, B. Minhas & R. M. Solow (1961): "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics* (43), side 225-250.

Barnett, W. A. & Lee, Y. W. (1985): "The Global Properties of the Miniflex Laurent, Generalized Leontief, and Translog Flexible Functional Forms", *Econometrica*, vol. 53, nr. 6, november.

Blanchard, O. J. & S. Fischer (1989): *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Chambers, R. G. (1988): *Applied production analysis – a dual approach*, Cambridge University Press.

Christensen, L. R., D. W. Jorgenson og L. J. Lau (1971): "Conjugate Duality and the Transcendental Production Function", *Econometrica*, juli, side 255-256.

Christensen, L. R., D. W. Jorgenson og L. J. Lau (1973): "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", *Review of Economics and Statistics*, februar, side 28-45.

Danmarks Statistik (1993): *ADAM – en model af dansk økonomi, oktober 1991*, Danmarks Statistik, København.

Deaton, A. (1978): "Specification and testing in Applied Demand Analysis", *The Economic Journal*, 88, september, side 524-36.

Deaton, A. (1986): "Demand Analysis", *Handbook of Econometrics*, vol. 3, North-Holland.

- Despotakis, K. A. (1986), "Economic performance of flexible functional forms", *European Economic Review*, no 30.
- Det Økonomiske Råd (1990): *SMEC – modeldokumentation og beregnede virkninger af økonomisk politik*, København.
- Diewert, W. E. (1971): "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function", *Journal of Political Economy*, 79, side 481-507.
- Diewert, W. E. (1974): "Applications of Duality Theory", *Frontiers of Quantitative Economics*, vol. 2, North-Holland.
- Diewert, W. E. og T. J. Wales (1987): "Flexible functional forms and global curvature conditions", *Econometrica*, vol. 55, nr. 1, januar.
- From, B. (1994): *Faktorefterspørgsel i fremstillings- og servicesektorerne i Danmark*, hovedopgave, Økonomisk Institut, Københavns Universitet.
- Greene, W. H. (1993): *Econometric Analysis*, andenudgaven, Macmillan, New York.
- Hacche, G. (1979): *The Theory of Economic Growth*, Macmillan Education.
- Hansen, K. T. (1993): "Teknologiske fremskridt i translog- og CES-produktionsfunktionerne", *Modelgruppepapir 07.12.93*, Danmarks Statistik.
- D. F. Heathfield og S. Wibe (1987), *An introduction to cost and production functions*, Macmillan Education Ltd., London.
- Jarque, C. M. & A. K. Bera (1987): "A test for Normality of Observations and Regression Residuals", *International Statistical Review*, side 163-172.
- Jorgenson, D. W. (1986): "Econometric Methods for Modeling Producer Behavior", *Handbook of Econometrics*, vol. 3, North-Holland.
- Kmenta, J. (1967): "On Estimation of the CES Production Function", *International Economic Review*, vol. 8, nr. 2, juni.
- Lau, L. J. (1986): "Functional Forms in Econometric Model Building", *Handbook of Econometrics*, vol. 3, North-Holland.
- Lütkepohl, H. (1991): *Introduction to multiple time series analysis*, Springer-Verlag.
- Morrison, C. (1988), "Quasi-fixed Inputs in U.S. and Japanese Manufacturing: A Generalized Leontieff Restricted Cost Function Approach", *Review of Economics and Statistics*.
- Neary, J. P. & K. W. S. Roberts (1980): "The Theory of Household Behaviour under Rationing", *European Economic Review* (13), side 25-42.



Nickell, S. J. (1985): "Error Correction, Partial Adjustment and all that: An Expository Note", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 47, 2, side 119-129.

Otto, L. (19xx): *On some Tests in Multivariate Statistical Analysis with Relevance in Econometrics*, notat fra Økonomisk Institut, Landbohøjskolen.

Rasmussen, P. B. (1991): "Modellering af udbudssiden i makroøkonometriske modeller", *Modelgruppepapir* 04.03.91, Danmarks Statistik.

Rasmussen, P. B. (1992a): "Translog-omkostningsfunktioner: Teoretiske egenskaber, og opstilling af estimationsligninger", *Modelgruppepapir* 26.04.92, Danmarks Statistik.

Rasmussen, P. B. (1992b): "Modellering af faktorefterspørgslen på baggrund af translog-omkostningsfunktioner: Estimation af langsigtsammenhænge", *Modelgruppepapir* 18.08.92, Danmarks Statistik.

Rasmussen, P. B. (1993a): "Dynamiske faktorefterspørgselsfunktioner: Teori og udledning af estimationsligninger på baggrund af translog-kortsigtsomkostningsfunktionen", *Modelgruppepapir* 08.04.93, Danmarks Statistik.

Rasmussen, P. B. (1993b): "Kort- og langsigtsfaktorefterspørgselsfunktioner baseret på CES produktionsfunktionen", *Modelgruppepapir* 08.06.93, Danmarks Statistik.

Rasmussen, P. B. (1993c): "Estimation af faktorefterspørgselsfunktioner baseret på 2. generations dynamik og translog- eller CES-omkostningsfunktionen", *Modelgruppepapir* 24.07.93, Danmarks Statistik [ikke udkommet].

Rothbarth, E. (1941): "The Measurement of Changes in Real Income under Conditions of Rationing", *Review of Economic Studies*, side 100-107.

Smidt, J. & Hansen, K. T. (1994): "Om faktorefterspørgslen i den kommende version af ADAM", *Modelgruppepapir* 07.02.94, Danmarks Statistik.

Thomsen, T. & K. T. Hansen & J. Smidt (1993): "Sammenligning af 2. generations translog- og CES-estimationer", *Modelgruppepapir* 20.11.93, Danmarks Statistik.

Thomsen, T. (1993): "Mulige genveje til tredjegerations translog-funktioner", *Modelgruppepapir* 10.10.93, Danmarks Statistik.

Thomsen, T. (1994): "Sammenligning af tredje-generations GLO- og translog-estimationer", *Modelgruppepapir* 03.02.94, Danmarks Statistik.

[Se her!: Den nedenstående er tilføjet i denne udgave. -Thomas Thomsen, august 1999]

Thomsen, T. (2000): "Short cuts to dynamic factor demand modelling", *Journal of Econometrics* [forthcoming, præcis dato ukendt]. Artiklen er en forbedret udgave af working paper

1998:2, som også har en anden titel, nemlig "Links between short- and long-run factor demand". De to artikler er indholdsmæssigt set så godt som identiske.

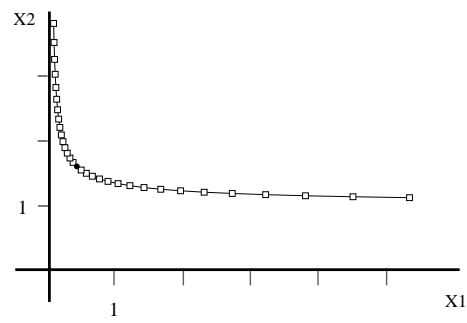
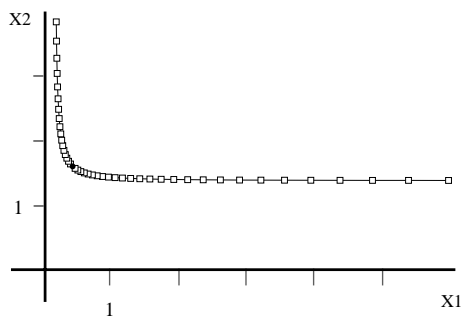
Waldfridson, B. (1987), *Dynamic Models of Factor Demand – An Application to Swedish Industri*, Ekonomiska Studier 18, Handelshögskolan vid Göteborgs Universitet.

**Bilag A. Flere isokvanter (forskellige omkostningsandele)**

**Figur A.1. Isokvanter for CES-funktionen,  $s_1^* = 20\%$**

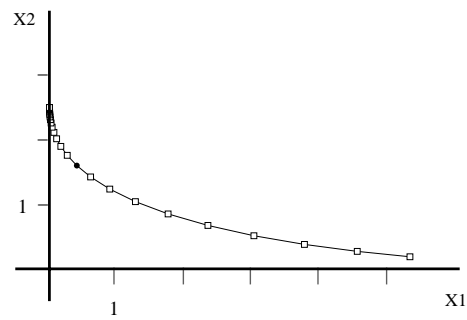
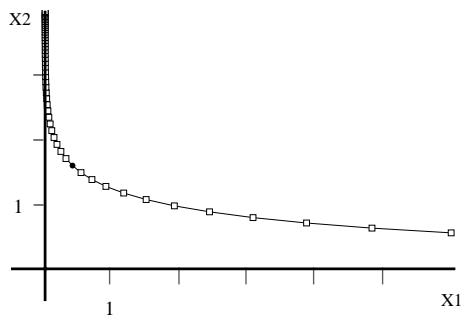
$\sigma = 0.4$

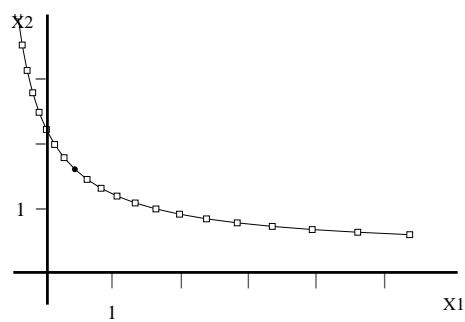
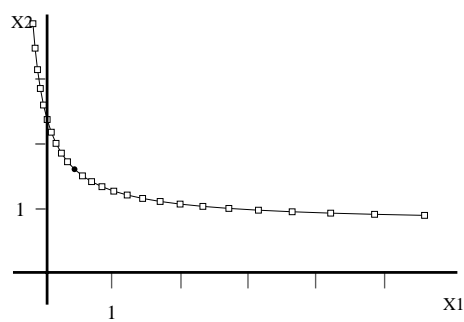
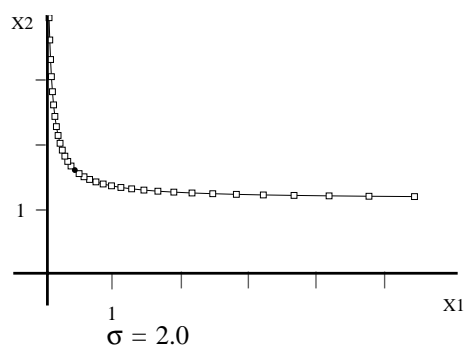
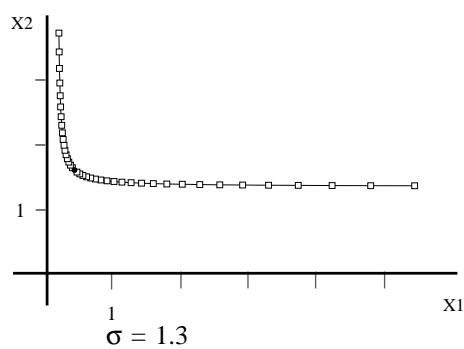
$\sigma = 0.7$



$\sigma = 1.3$

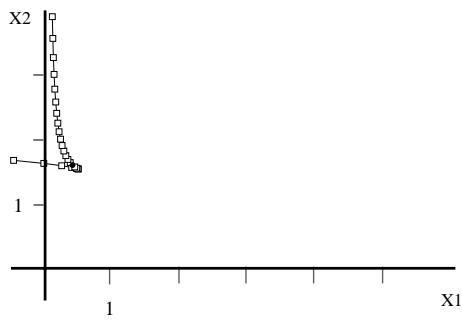
$\sigma = 2.0$



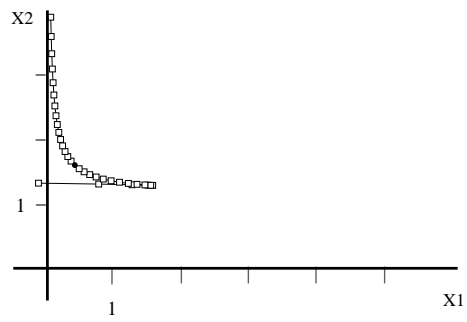
**Figur A.2. Isokvanter for GLO-funktionen,  $s_1^* = 20\%$**  $\sigma = 0.4$  $\sigma = 0.7$ 

Figur A.3. Isokvanter for translogfunktionen,  $s_1^* = 20\%$

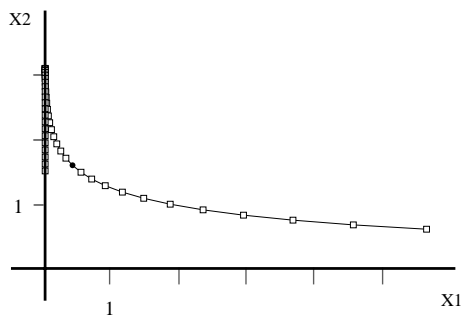
$\sigma = 0.4$



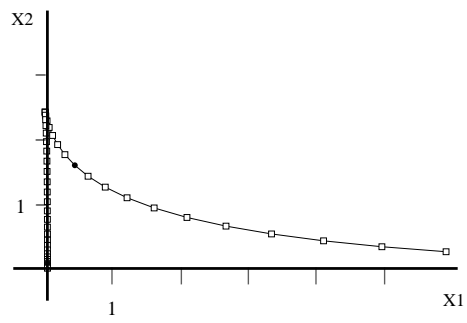
$\sigma = 0.7$



$\sigma = 1.3$



$\sigma = 2.0$



**Bilag B. Virksomhedernes kortsigtede marginalomkostninger**

*[Se her!: I 1994 vidste forfatteren ikke, at kortsigtede marginalomkostninger kan udledes fra langsigtede marginalomkostninger ved simpelthen at indsætte skyggepriser( $r$ ) $n(e)$  i sidstnævnte. Derfor er dette bilag ikke med her, da det – set i bagklogskabens ulideligt klare lys – er uinteressant. Se i stedet Working Paper 1998:2 side 14 og 34.]*

## Bilag C. Oversigt over datakonstruktion og aggregering

Nedenstående summariske oversigt er taget fra Thomsen/Hansen/Smidt (1993).

### Kapitalapparat (K)

Der er kun tale om maskinkapital – bygningskapitalen beskrives ikke. Kapitalapparatet (dvs. maskinkapitalen) er konstrueret ud fra erhvervsfordelte bruttoinvesteringer og en fast afskrivningsrate, som for erhvervene som helhed er på omkring 15%. Til sammenligning kan det nævnes, at den nuværende fysiske afskrivningsrate i ADAM er ca. 8%. Afskrivningsrate og et udgangsniveau for kapitalapparatet (et såkaldt "benchmark") er for hvert erhverv fundet på følgende måde. Først er der lavet et såkaldt "sudden-death"-kapitalapparat ved løbende at tage summen af bruttoinvesteringerne i de sidste seks år. Dernæst er den gennemsnitlige afskrivningsrate i "sudden-death"-kapitalapparatet beregnet. Denne værdi bruges nu som afskrivningsrate i det "rigtige" kapitalapparat, idet 1972-værdien for "sudden-death"-kapitalapparatet bruges som udgangsniveau for det "rigtige" kapitalapparat. Afskrivningsraten på omkring 15% modsvarer altså en levetid på omkring seks år. *Pris på kapitalapparatet*: Der bruges et usercost-udtryk, som teoretisk svarer til det, der allerede bruges i ADAMs investeringsligninger. I usercost-udtrykket indgår således rente, forventede prisstigninger på kapitalapparatet, beskatningsregler og fysisk afskrivningsrate. Usercostudtrykket indeholder desuden en konstant "risikopræmie", som sikrer, at erhvervenes "rene" profit i gennemsnit har været omkring nul i den historiske periode. Denne "rene" profit er rensat for bygninger og aflønning af selvstændige.

### Arbejdskraft (L)

Som mål for arbejdskraften bruges antal præsterede arbejdstimer. Der skelnes ikke mellem arbejder-timer og funktionær-timer, og tallet fås ved først at korrigere ADAMs beskæftigelsestal for omfanget af deltidsbeskæftigede og dernæst at gange med den gennemsnitlige årlige arbejdstid for heltidsansatte; arbejdstidsbegrebet er således bl.a. inkl. overarbejde. Selvstændige (selvstændiges præsterede arbejdstimer) er ikke med i arbejdskraftbegrebet. *Pris på arbejdskraft*: Timelønningerne i de enkelte erhverv fås ved at dividere erhvervets lønsum med antal præsterede arbejdstimer. I timelønnen vil der derfor også være indeholdt evt. overarbejdsbetaling. Timelønningerne følger grundlæggende ADAMs lønbegreb, *lnak*.

### Energi (E)

Erhvervenes energiforbrug er defineret som det pågældende erhvervs input fra olieraffinaderier (*ng*), el-, gas- & fjernvarmeforsyning (*ne*) samt de tre energiimportvarer: kul & koks (*m3k*), råolie (*m3r*) og olieprodukter mv. (*m3q*). Disse tal fås enkelt fra ADAMs i-o system. *Pris på energi*: Erhvervenes energipriser fås som deflatoren på energiforbruget. Disse priser afhænger grundlæggende af priserne på leverancer fra de to indenlandske energierhverv (raffinaderier og el; se ovenfor), prisen på energiimportvarerne, energiafgifter samt eventuel prisdiskriminering.

### Materialer (M)

Materialeforbruget fås simpelt ud fra ADAMs i-o system. Det er de leverancer til erhvervet fra andre erhverv og import, som *ikke* har noget med energi at gøre. *Pris på materialer:* Priserne på materialer er deflatoren på erhvervets materialeforbrug. Priserne bestemmes af prisen på leverancer fra andre erhverv, importpriserne, afgifter samt eventuel prisdiskriminering.

### De samlede omkostninger i nationalregnskabsmæssig forstand

For at komme til de samlede omkostninger i nationalregnskabsmæssig forstand (= produktionsværdien i løbende priser) skal man til omkostningerne ved de ovennævnte fire produktionsfaktorer lægge: *omkostninger til bygningskapital, aflønning af selvstændige samt den "rene" profit.*<sup>45</sup>

### Aggregeringen

Det er ikke hensigtsmæssigt at estimere på aggregatet af samtlige 19 ADAM-erhverv, idet flere af disse er så specielle, at det blot ville sløre billedet. De seks erhverv, som ikke er med i aggregatet er de følgende:

<i>e</i>	Brunkul, råolie og naturgas
<i>ng</i>	Olieraffinaderier
<i>ne</i>	El, gas og fjernvarme
<i>qs</i>	Søtransport
<i>h</i>	Boligbenyttelse
<i>o</i>	Offentlige tjenester

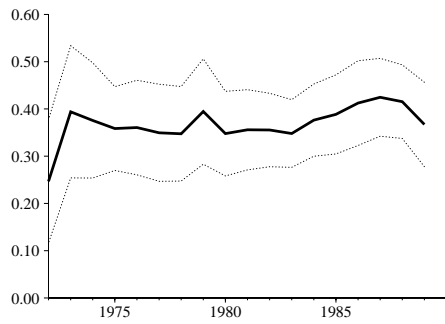
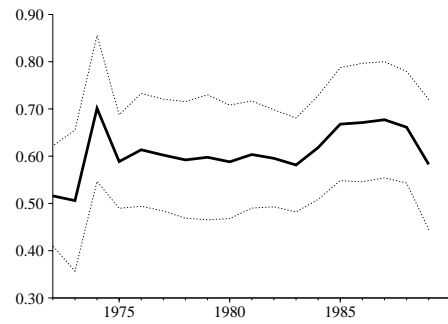
Det efterlader følgende tretten erhverv:

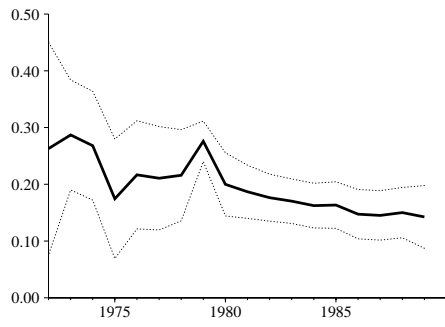
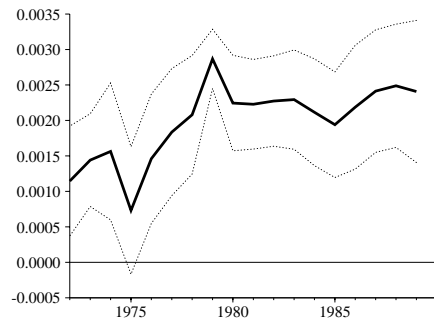
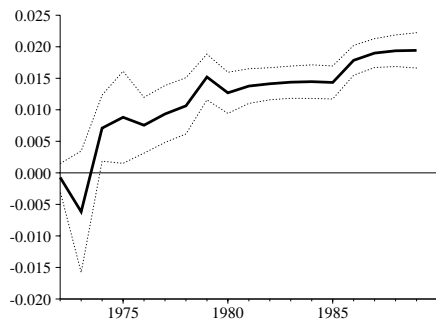
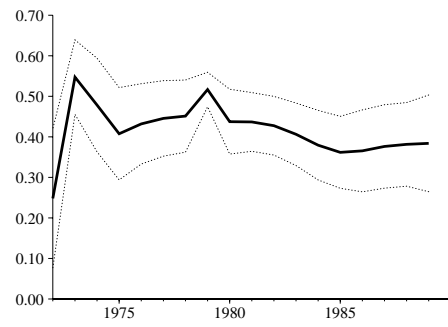
<i>a</i>	Landbrug mv.
<i>nf</i>	Næringsmiddelindustri
<i>nn</i>	Nydelsesmiddelindustri
<i>nb</i>	Leverandører til byggeri
<i>nm</i>	Jern- og metalindustri
<i>nt</i>	Transportmiddelindustri
<i>nk</i>	Kemisk industri
<i>nq</i>	Anden fremstillingsvirksomhed
<i>b</i>	Bygge- og anlægsvirksomhed
<i>qh</i>	Handel
<i>qt</i>	Anden transport end søtransport mv.
<i>qf</i>	Finansiell virksomhed
<i>qq</i>	Andre tjenesteydende erhverv

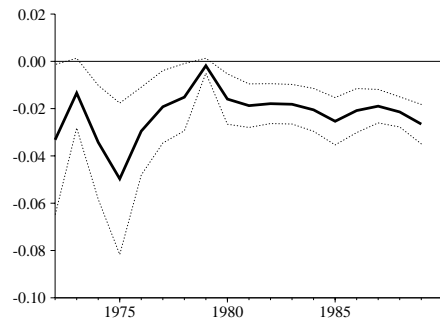
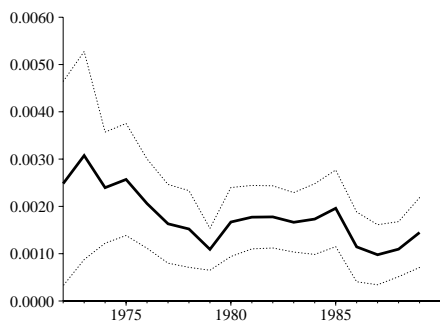
---

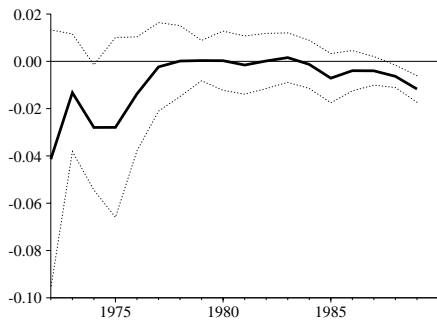
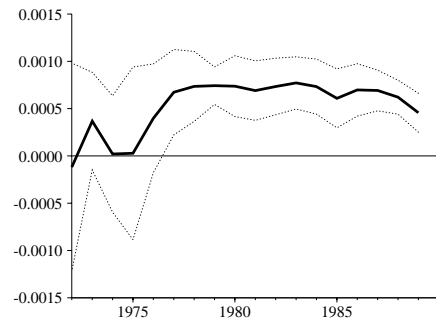
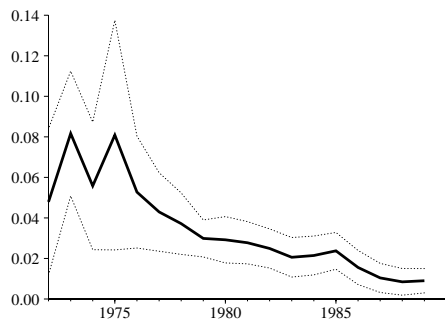
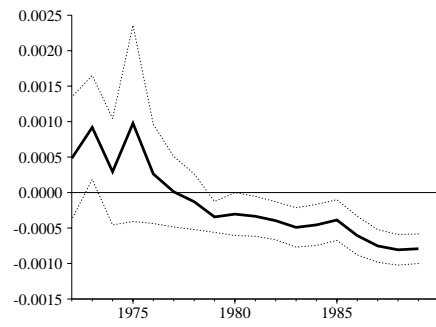
<sup>45</sup>Hvor "ren" denne rene profit er, er diskutabelt; bl.a. ligger aflønning af produktionsfaktoren "jord" her.

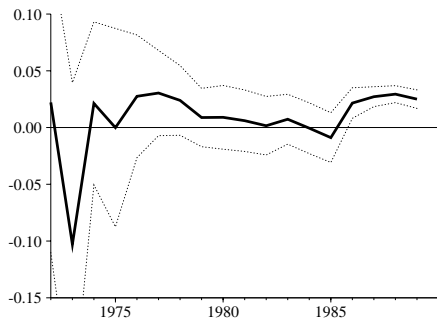
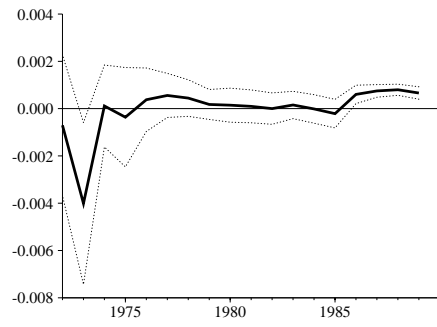
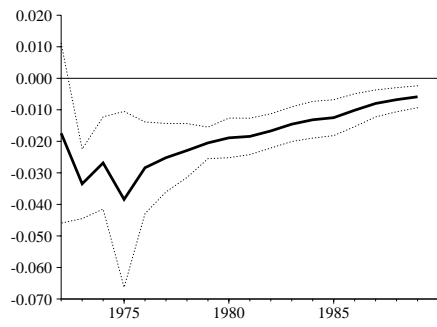
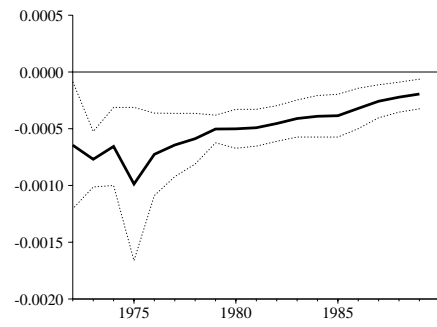


**Bilag D. Rekursiv estimation – de tyve parametre** $\lambda_1$  $\lambda_2$  $\bar{\lambda}_1$  $\bar{\lambda}_2$ 

$\beta_{11}$  $\beta_{22}$  $\beta_{33}$  $\beta_{44}$ 

$\beta_{12}$  $\beta_{13}$  $\beta_{23}$  $\beta_{34}$ 

$\omega_1$  $\bar{\omega}_1$  $\omega_2$  $\bar{\omega}_2$ 

$\omega_3$  $\bar{\omega}_3$  $\omega_4$  $\bar{\omega}_4$ 

**Bilag E. Dokumentation af testtræer****Kortsigtsdynamik****Tabel D1. Fejlkorr. i  $K+L$  + lagget endogen**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.17	-0.07	-0.01	0.25	-4.7%	-1.1%	0.45	0.18	1.1%	2.07	0.5
<i>L</i>	0.02	-0.23	-0.01	0.25	5.3%	0.9%	0.89	0.38	1.4%	1.76	2.0
<i>E</i>	-0.05	-0.09	-0.11	0.25	-2.1%	2.7%	•	•	3.0%	1.92	0.7
<i>M</i>	0.04	0.16	0.01	-0.20	0.8%	-0.6%	•	•	1.0%	1.20	0.0

Anm.  $n = 1957-89.$  Log likelihood = 376.84  $\lambda_{x1} = 0.59$   $\lambda_{x2} = -0.04$

**Tabel D2. Fejlkorr. i  $K+L$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.30	0.22	-0.07	0.14	-3.9%	-1.2%	0.37	0.59	1.1%	1.14	8.7
<i>L</i>	0.05	-0.21	0.02	0.14	5.6%	1.0%	0.76	0.50	1.5%	1.58	0.7
<i>E</i>	-0.28	0.28	-0.14	0.14	-1.4%	2.4%	•	•	4.0%	1.06	1.6
<i>M</i>	0.02	0.09	0.01	-0.11	0.6%	-0.6%	•	•	1.0%	1.00	0.0

Anm.  $n = 1957-89.$  Log likelihood = 371.54

**Tabel D3. Partiel  $K+L$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.34	0.27	-0.06	0.13	-3.7%	-1.4%	0.44	0.44	1.4%	1.04	0.8
<i>L</i>	0.07	-0.21	0.01	0.13	5.6%	1.0%	0.70	0.70	1.6%	1.25	0.3
<i>E</i>	-0.24	0.23	-0.12	0.13	-1.4%	2.4%	•	•	3.8%	1.27	1.0
<i>M</i>	0.02	0.08	0.00	-0.11	0.5%	-0.6%	•	•	1.1%	0.83	0.0

Anm.  $n = 1957-89.$  Log likelihood = 363.98

**Tabel D4. Fejlkorr. i K**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.27	0.25	-0.05	0.07	-3.8%	-1.2%	0.43	0.66	1.3%	0.93	9.4
<i>L</i>	0.06	-0.15	0.01	0.07	5.7%	1.0%	1	1	2.0%	0.78	1.8
<i>E</i>	-0.20	0.24	-0.11	0.07	-1.4%	2.5%	•	•	3.7%	1.24	1.1
<i>M</i>	0.01	0.05	0.00	-0.06	0.5%	-0.6%	•	•	1.3%	0.59	0.4

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 360.14

**Tabel D5. Partiel K**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.29	0.21	-0.04	0.12	-4.0%	-1.1%	0.51	0.51	1.5%	0.88	1.3
<i>L</i>	0.05	-0.18	0.01	0.12	5.6%	1.1%	1	1	2.0%	0.76	1.8
<i>E</i>	-0.17	0.15	-0.10	0.12	-1.6%	2.6%	•	•	3.6%	1.44	0.5
<i>M</i>	0.02	0.08	0.00	-0.10	0.6%	-0.7%	•	•	1.3%	0.62	0.2

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 356.19

**Tabel D6. Rene langsigtsligninger**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.21	0.19	-0.03	0.05	-4.3%	-1.0%	1	1	2.9%	0.93	0.2
<i>L</i>	0.04	-0.10	0.01	0.05	5.9%	0.9%	1	1	2.0%	0.65	1.5
<i>E</i>	-0.12	0.16	-0.09	0.05	-1.7%	2.6%	•	•	3.5%	1.63	0.0
<i>M</i>	0.01	0.03	0.00	-0.04	0.4%	-0.6%	•	•	1.3%	0.61	0.5

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 332.23

## Nestningsstrukturer

Tabel N1. (KLEM)

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.26	0.19	-0.07	0.14	-4.0%	-1.1%	0.41	0.64	1.1%	1.19	9.7
<i>L</i>	0.05	-0.31	-0.01	0.27	4.9%	1.2%	0.79	0.54	1.3%	1.66	2.5
<i>E</i>	-0.27	-0.10	-0.17	0.54	-2.7%	2.8%	•	•	3.5%	1.40	0.9
<i>M</i>	0.02	0.17	0.02	-0.21	1.0%	-0.7%	•	•	1.0%	1.22	0.6

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 375.22

Tabel N2. ((KL)E)M)

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.27	0.06	-0.01	0.22	-4.3%	-0.7%	0.39	0.38	1.8%	0.53	0.4
<i>L</i>	0.01	-0.22	-0.01	0.22	5.4%	1.0%	0.85	0.48	1.4%	1.68	2.1
<i>E</i>	-0.02	-0.09	-0.10	0.22	-2.1%	2.9%	•	•	3.1%	1.80	0.4
<i>M</i>	0.03	0.14	0.01	-0.18	0.8%	-0.7%	•	•	1.0%	1.04	0.3

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 361.27

Tabel N3. ((KLE)M)

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.30	0.22	-0.07	0.14	-3.9%	-1.2%	0.37	0.59	1.1%	1.14	8.7
<i>L</i>	0.05	-0.21	0.02	0.14	5.6%	1.0%	0.76	0.50	1.5%	1.58	0.7
<i>E</i>	-0.28	0.28	-0.14	0.14	-1.4%	2.4%	•	•	4.0%	1.06	1.6
<i>M</i>	0.02	0.09	0.01	-0.11	0.6%	-0.6%	•	•	1.0%	1.00	0.0

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 371.54



**Tabel N4. (((KE)L)M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.32	0.24	-0.06	0.15	-3.9%	-1.2%	0.36	0.56	1.2%	1.00	6.6
<i>L</i>	0.06	-0.22	0.01	0.15	5.6%	1.0%	0.77	0.52	1.5%	1.57	0.8
<i>E</i>	-0.26	0.24	-0.12	0.15	-1.5%	2.5%	•	•	3.9%	1.13	1.4
<i>M</i>	0.02	0.09	0.01	-0.12	0.6%	-0.6%	•	•	1.0%	0.99	0.0

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 371.14

**Tabel N5. (((K-E)L)M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.27	0.22	-0.07	0.12	-3.7%	-1.4%	0.36	0.58	1.1%	1.12	8.4
<i>L</i>	0.05	-0.19	0.01	0.12	5.7%	0.8%	0.76	0.55	1.5%	1.54	0.7
<i>E</i>	-0.27	0.22	-0.07	0.12	-1.3%	2.2%	•	•	4.7%	0.87	1.5
<i>M</i>	0.02	0.08	0.00	-0.10	0.5%	-0.5%	•	•	1.1%	0.93	0.0

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 368.07

**Tabel N6. (((KL)E)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.20	0.19	0.00	0	-3.9%	-0.9%	0.47	0.51	1.8%	0.48	0.2
<i>L</i>	0.05	-0.05	0.00	0	5.9%	0.8%	1.00	0.99	2.1%	0.85	0.9
<i>E</i>	0.02	0.07	-0.08	0	-1.6%	2.8%	•	•	3.4%	1.56	0.1
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.9

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 349.69

**Tabel N7. ((KLE)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.22	0.28	-0.06	0	-3.4%	-1.5%	0.47	0.62	1.1%	1.23	5.1
<i>L</i>	0.07	-0.09	0.02	0	5.7%	1.0%	0.99	0.95	2.1%	0.81	1.2
<i>E</i>	-0.25	0.39	-0.14	0	-1.1%	2.5%	•	•	4.7%	0.89	2.2
<i>M</i>	0	0	0	0	0.4%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	1.1

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 366.68

**Tabel N8. (((KE)L)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.26	0.31	-0.05	0	-3.6%	-1.4%	0.43	0.66	1.2%	1.03	9.1
<i>L</i>	0.07	-0.09	0.02	0	5.9%	0.9%	0.97	0.97	2.1%	0.83	1.2
<i>E</i>	-0.21	0.31	-0.10	0	-1.4%	2.5%	•	•	4.3%	1.21	0.6
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.9

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 362.82

**Tabel N9. (((K-E)L)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.24	0.30	-0.06	0	-3.2%	-1.8%	0.43	0.58	1.2%	1.11	5.7
<i>L</i>	0.08	-0.09	0.02	0	5.8%	1.0%	0.98	0.98	2.1%	0.84	1.3
<i>E</i>	-0.24	0.30	-0.06	0	-0.8%	1.6%	•	•	4.8%	0.93	0.4
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.8

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 357.89

Nestningsstrukturer med kun *K* træg**Tabel K1.** (*KLEM*)

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.24	0.23	-0.06	0.07	-3.8%	-1.3%	0.44	0.68	1.1%	1.29	8.0
<i>L</i>	0.06	-0.20	-0.01	0.15	5.5%	1.1%	1	1	1.8%	1.10	2.8
<i>E</i>	-0.26	-0.17	-0.20	0.63	-2.8%	3.0%	•	•	3.2%	1.39	0.4
<i>M</i>	0.01	0.09	0.02	-0.13	0.7%	-0.7%	•	•	1.1%	1.02	0.1

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 369.25

**Tabel K2.** (((*KL*)*E*)*M*)

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.24	0.05	0.00	0.19	-4.4%	-0.6%	0.42	0.45	1.8%	0.48	0.1
<i>L</i>	0.01	-0.20	0.00	0.19	5.4%	1.2%	1	1	1.9%	0.78	1.4
<i>E</i>	-0.02	-0.08	-0.10	0.19	-2.1%	3.0%	•	•	3.3%	1.64	0.2
<i>M</i>	0.03	0.12	0.01	-0.16	0.8%	-0.8%	•	•	1.2%	0.63	0.2

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 352.24

**Tabel K3.** ((*KLE*)*M*)

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.27	0.25	-0.05	0.08	-3.8%	-1.2%	0.43	0.66	1.3%	0.92	9.3
<i>L</i>	0.06	-0.15	0.01	0.08	5.7%	1.0%	1	1	2.0%	0.78	1.8
<i>E</i>	-0.20	0.23	-0.11	0.08	-1.4%	2.5%	•	•	3.7%	1.25	1.0
<i>M</i>	0.01	0.05	0.00	-0.06	0.5%	-0.6%	•	•	1.3%	0.59	0.4

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 360.14

**Tabel K4. (((KE)L)M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.27	0.24	-0.05	0.08	-3.8%	-1.2%	0.43	0.66	1.2%	0.95	9.7
<i>L</i>	0.06	-0.15	0.01	0.08	5.7%	1.0%	1	1	2.0%	0.78	1.9
<i>E</i>	-0.20	0.24	-0.11	0.08	-1.4%	2.5%	•	•	3.7%	1.24	1.1
<i>M</i>	0.01	0.05	0.00	-0.06	0.5%	-0.6%	•	•	1.3%	0.59	0.4

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 360.12

**Tabel K5. (((K-E)L)M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.24	0.24	-0.06	0.06	-3.7%	-1.4%	0.43	0.66	1.1%	1.14	8.6
<i>L</i>	0.06	-0.13	0.01	0.06	5.8%	0.9%	1	1	2.1%	0.80	1.7
<i>E</i>	-0.24	0.24	-0.06	0.06	-1.2%	2.2%	•	•	4.6%	0.88	1.4
<i>M</i>	0.01	0.04	0.00	-0.05	0.4%	-0.6%	•	•	1.3%	0.57	0.5

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 356.36

**Tabel K6. (((KL)E)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.20	0.19	0.00	0	-3.9%	-0.9%	0.48	0.52	1.8%	0.49	0.2
<i>L</i>	0.05	-0.05	0.00	0	5.9%	0.8%	1	1	2.1%	0.85	0.8
<i>E</i>	0.02	0.06	-0.08	0	-1.6%	2.8%	•	•	3.5%	1.61	0.1
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.9

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 349.64

**Tabel K7. ((KLE)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.26	0.30	-0.05	0	-3.6%	-1.3%	0.45	0.68	1.3%	0.96	8.9
<i>L</i>	0.07	-0.09	0.02	0	5.9%	0.9%	1	1	2.1%	0.82	1.4
<i>E</i>	-0.19	0.29	-0.10	0	-1.3%	2.4%	•	•	3.8%	1.22	1.0
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.9

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 359.73

**Tabel K8. (((KE)L)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.25	0.29	-0.05	0	-3.6%	-1.3%	0.45	0.68	1.3%	0.98	9.1
<i>L</i>	0.07	-0.09	0.02	0	5.9%	0.9%	1	1	2.1%	0.81	1.4
<i>E</i>	-0.19	0.29	-0.11	0	-1.3%	2.4%	•	•	3.8%	1.22	1.0
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.9

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 359.69

**Tabel K9. (((K-E)L)-M)**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.22	0.28	-0.05	0	-3.5%	-1.5%	0.45	0.68	1.1%	1.17	7.9
<i>L</i>	0.07	-0.08	0.02	0	5.9%	0.9%	1	1	2.1%	0.83	1.3
<i>E</i>	-0.22	0.28	-0.05	0	-1.1%	2.0%	•	•	4.8%	0.82	1.3
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.56	0.8

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 354.43

**Tabel K10.**  $((KL)-E)-M$ 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.18	0.18	0	0	-3.8%	-0.9%	0.45	0.53	1.7%	0.49	0.1
<i>L</i>	0.04	-0.04	0	0	6.0%	0.8%	1	1	2.1%	0.90	0.8
<i>E</i>	0	0	0	0	-1.8%	3.0%	•	•	4.5%	1.01	1.0
<i>M</i>	0	0	0	0	0.3%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.9

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 346.57

**Tabel K11.**  $((KE)-L)-M$ 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.01	0	0.01	0	-4.3%	-0.6%	0.94	0.87	3.0%	0.53	0.2
<i>L</i>	0	0	0	0	6.0%	0.8%	1	1	2.2%	0.69	0.4
<i>E</i>	0.06	0	-0.06	0	-1.8%	2.9%	•	•	4.0%	1.28	0.2
<i>M</i>	0	0	0	0	0.4%	-0.5%	•	•	1.3%	0.57	0.9

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 328.83

## Trends

Tabel T1. Alle trends

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.30	0.22	-0.07	0.14	-3.9%	-1.2%	0.37	0.59	1.1%	1.14	8.7
<i>L</i>	0.05	-0.21	0.02	0.14	5.6%	1.0%	0.76	0.50	1.5%	1.58	0.7
<i>E</i>	-0.28	0.28	-0.14	0.14	-1.4%	2.4%	•	•	4.0%	1.06	1.6
<i>M</i>	0.02	0.09	0.01	-0.11	0.6%	-0.6%	•	•	1.0%	1.00	0.0

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 371.54

Tabel T2. Alle flade

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.31	0.25	-0.08	0.13	-2.5%	-2.5%	0.33	0.53	1.1%	1.15	4.6
<i>L</i>	0.07	-0.23	0.02	0.13	3.3%	3.3%	0.74	0.50	2.7%	0.50	0.5
<i>E</i>	-0.32	0.31	-0.12	0.13	0.5%	0.5%	•	•	4.4%	0.89	0.7
<i>M</i>	0.02	0.08	0.01	-0.11	0.1%	0.1%	•	•	3.3%	0.15	2.7

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 321.66

Tabel T3. Alle ens

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.81	0.43	-0.08	0.47	1.8%	0.0%	0.25	0.27	2.0%	0.72	1.0
<i>L</i>	0.10	-0.58	0.01	0.47	1.8%	0.0%	0.66	0.32	1.4%	1.70	1.1
<i>E</i>	-0.28	0.11	-0.30	0.47	1.8%	0.0%	•	•	7.1%	0.47	13.7
<i>M</i>	0.07	0.31	0.02	-0.40	1.8%	0.0%	•	•	1.1%	1.18	0.5

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 326.30

**Tabel T4. Alle ens og flade**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.59	0.45	-0.03	0.17	0.5%	0.5%	0.37	0.30	2.2%	0.69	0.3
<i>L</i>	0.11	-0.29	0.01	0.17	0.5%	0.5%	0.80	0.05	1.5%	2.01	0.9
<i>E</i>	-0.11	0.08	-0.14	0.17	0.5%	0.5%	•	•	6.3%	0.50	2.7
<i>M</i>	0.02	0.10	0.01	-0.13	0.5%	0.5%	•	•	1.8%	0.40	2.5

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = (322.92)

**Tabel T5. Trends i  $\div LEM$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.63	0.63	-0.07	0.06	0%	0%	0.24	0.28	1.9%	0.72	0.4
<i>L</i>	0.16	-0.24	0.02	0.06	5.1%	0.3%	0.66	0.41	1.5%	1.97	0.3
<i>E</i>	-0.30	0.40	-0.16	0.06	0.1%	3.8%	•	•	4.3%	1.16	1.5
<i>M</i>	0.01	0.04	0.00	-0.05	0.2%	-0.4%	•	•	1.1%	1.06	0.6

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 360.35

**Tabel T6. Trends i  $K \div EM$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.37	-0.01	-0.12	0.51	-10.6%	-1.5%	0.34	0.50	1.3%	0.89	3.9
<i>L</i>	0.00	-0.51	0.00	0.51	0%	0%	0.70	0.33	1.5%	1.53	0.4
<i>E</i>	-0.47	0.07	-0.10	0.51	-6.2%	1.1%	•	•	3.6%	1.30	0.6
<i>M</i>	0.08	0.33	0.02	-0.43	4.8%	0.3%	•	•	1.1%	1.20	0.0

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 362.35



**Tabel T7. Trends i  $KL\div M$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.53	0.41	-0.12	0.25	-2.3%	-3.8%	0.32	0.40	1.5%	0.95	0.2
<i>L</i>	0.11	-0.38	0.03	0.25	4.5%	1.9%	0.73	0.39	1.4%	1.68	0.7
<i>E</i>	-0.50	0.40	-0.14	0.25	0%	0%	•	•	3.9%	1.16	0.9
<i>M</i>	0.04	0.15	0.01	-0.20	0.9%	-0.6%	•	•	1.0%	1.11	0.3

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 366.01

**Tabel T8. Trends i  $KLE\div$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.31	0.20	-0.08	0.18	-4.1%	-1.2%	0.35	0.56	1.1%	1.17	7.0
<i>L</i>	0.05	-0.25	0.02	0.18	6.6%	0.0%	0.73	0.28	1.5%	1.83	0.9
<i>E</i>	-0.31	0.29	-0.17	0.18	-1.6%	2.5%	•	•	4.1%	1.00	1.2
<i>M</i>	0.03	0.12	0.01	-0.16	0%	0%	•	•	1.1%	1.12	0.1

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 367.69

**Tabel T9. Trends i  $KL\div\div$** 

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.51	0.40	-0.13	0.23	-2.5%	-3.5%	0.30	0.37	1.5%	0.95	0.2
<i>L</i>	0.11	-0.37	0.03	0.23	6.1%	0.7%	0.71	0.23	1.4%	1.85	0.5
<i>E</i>	-0.51	0.45	-0.18	0.23	0%	0%	•	•	4.1%	1.06	0.8
<i>M</i>	0.04	0.15	0.01	-0.19	0%	0%	•	•	1.1%	1.10	0.1

Anm. n = 1957-89. Log likelihood = 363.47

**Tabel T10. Ingen trends**

	$P_K$	$P_L$	$P_E$	$P_M$	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	s	DW	JB
<i>K</i>	-0.36	0.22	-0.01	0.15	0%	0%	0.28	0.12	2.2%	0.63	1.3
<i>L</i>	0.06	-0.19	-0.02	0.15	0%	0%	0.69	0.03	1.8%	1.93	0.0
<i>E</i>	-0.06	-0.34	0.25	0.15	0%	0%	•	•	6.4%	0.68	1.1
<i>M</i>	0.02	0.08	0.00	-0.11	0%	0%	•	•	1.2%	0.74	0.7

Anm.      n = 1957-89.      Log likelihood = (330.36)