Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Sofie Andersen

19. juli 2012

Det teoretiske grundlag for en ny boligmodel

Resumé:

Det teoretiske grundlag for den nuværende boligmodel samles i dette papir. Derefter udvides det til at omfatte bolig som et nest af kapital og grunde.

SOA19712

Nøgleord: bolig

1. Introduktion

Dette papir har to formål. Det første formål er at samle det teoretiske grundlag for boligmodellen i ADAM. Papiret tager derfor udgangspunkt i tidligere modelgruppepapirer[1] samt den seneste udgave af ADAM-bogen.
Det andet formål er at udrede det teoretiske grundlag for en udvidelse af boligmodellen til at betragte bolig som et nest af grund og kapital med tilhørende mulighed for at substituere mellem ”varerne”.

Boligprisen i ADAM, *phk*, er prisen for et enfamilieshus. Når man køber et hus i Danmark, køber man både selve huset samt den grund huset står på og oftest også noget grund rundt om. Dette betaler man en samlet pris for. Det er disse priser fra ejendomssalg, der bruges til at danne *phk*. Det kan derfor være lidt misvisende at bruge *phk* sammen med *fkbh*, som er kapitalmængden og derfor kun bygningsdelen af boligen. Når en bolig bliver mere værd, kan det enten skyldes, at bygningerne eller at grunden bliver mere værd (eller begge dele samtidig). Hvis grunden bliver mere værd, kan det være, at man vil klare sig med mindre have, når man skal ud og købe nyt og derfor bruge mindre grund. Dette kan man ikke se i den nuværende model. Man kan ikke se substitutionseffekter mellem land og kapital. I DREAM indgår land og kapital med en subsitutionselasticitet mellem dem på 0.2.
Prisen på bolig er historisk steget mere end investeringsprisen. Dette kan vi ikke forklare i vores nuværende Tobins q set-up med de nuværende priser på grunde. Det kan skyldes et begrænset udbud af grunde. Derfor vil vi gerne indføre et ekstra nest i forbrugsfunktionen, hvor forbruget af bolig deles ud på at være et forbrug af kapital og et forbrug af grunde, jf. figur 1.

Figur 1 Forslag til forbrugssystemets nestningsstruktur.

<table>
<tr><td colspan="3">C</td></tr>
<tr><td colspan="2">C_H</td><td>C_{xH}</td></tr>
<tr><td>K</td><td>G</td><td>yderligere split af C_{xH}[2]</td></tr>
</table>

2. Den nuværende boligmodel

Vi ser på en model, hvor en agent, der har en CES-nyttefunktion, skal bestemme sig for sit forbrug af bolig – altså for efterspørgslen efter bolig. I denne udledning hedder den fC_H. fC_H er en aggregeret størrelse, der består af en mængde grund og en mængde kapital (bygningerne man sætter på grunden). Vi antager her, at grunde og kapital er perfekte komplementer, og deres substitutionselasticitet således er 0 (denne antagelse vil blive løsnet senere i papiret). Dette er modelleret så grunde udgør 20 % af omkostningerne til en bolig i basisåret.

[1] Herunder GRH06807, THV01806, JAO28N01, GRH20110 og GRH10510.
[2] Som nuværende

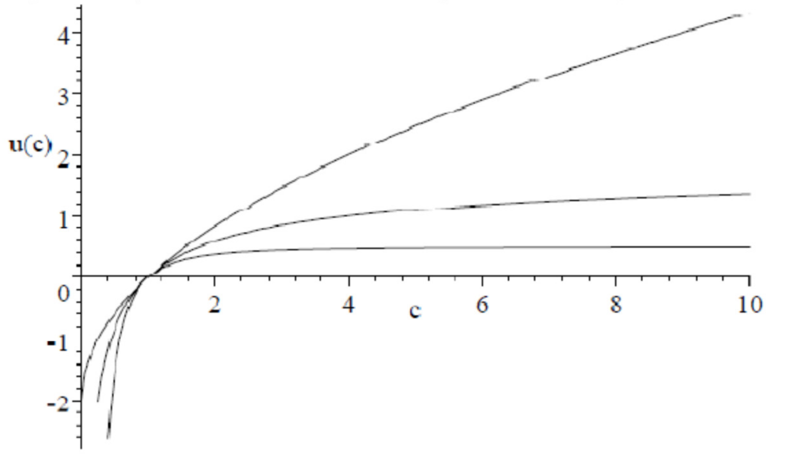
Forbrugeren har følgende nyttefunktion

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{2.1}$$

Her er C_H forbrug af bolig, mens C_{xH} er resterende forbrug. e'erne er effektivitetsindeks. Funktionen er normeret, så den er mulig at estimere, men er ellers på generel CES form. Når sigma estimeres frit i ADAM, bliver værdien omkring 0.15. I dec09 bindes sigma til 0.30. Foreløbige estimater af en ny boligmodel med andre tal for grundprisen viser, at sigma kan estimeres til omkring 0.45. Dette er dog stadig langt fra at være større end 1.

Sigma måler rundingen på nyttefunktionen, jf. figur 2. I figur 2 er forbruget af alle varer undtagen en holdt konstant. Figuren viser da, hvordan nytten ændres, når man øger forbruget af den ene vare. Når sigma er uendelig stor, da vil man få meget nytte af at få mere af blot en enkelt vare. Det svarer til at varerne er substitutter, mens hvis sigma er 0, da er linien vandret, og man bliver kun bedre stillet, hvis man får mere af alle varer. At sigma er mindre end 1 er således ikke væsentligt forskelligt fra situationer med sigma større end 1, blot er kurven mindre rund – dvs. har man noget fra begge varegrupper, man ønsker at forbruge, da vil man ikke blive meget bedre stillet af at få en hel bunke af den ene varegruppe; man ønsker at forbruge mere fra begge grupper.

Figur 2 Nytte af mere c ved forskellige værdier af sigma



Anm.: Den øverste graf har σ=2, den midterste har σ=2/3, mens den nederste har σ=1/3.
Kilde: Note fra Macroeconomics C, efterår 2010.

Forbrugeren skal overholde sin budgetbetingelse, dvs. at værdien af boligforbruget og værdien af resterende forbrug ikke må overstige værdien af det samlede forbrug. Da forbrugeren er nyttemaksimerende, bruger forbrugeren hele sit budget.

$$C = p_H \cdot fC_H + p_{xH} \cdot fC_{xH} \tag{2.2}$$

Her er C det samlede forbrug, mens p_H og p_{xH} er hhv. prisen på boligforbrug og prisen på resterende forbrug. C er givet ud fra en livscyklus betragtning, hvor forbrugeren optimerer sin nytte intertemporalt, jf. THV01806.

Dermed kan forbrugerens problem opskrives på følgende måde

$$\max_{fC_H, fC_{xH}} U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$s.t. \tag{2.3}$$

$$\overline{C} = p_H \cdot fC_H + p_{xH} \cdot fC_{xH}$$

Problemet opskrives på Lagrange form og løses, jf. bilag A.
Der fås følgende løsning. Denne løsning svarer til løsningen i GRH20110[3].

$$fC_H = \frac{C \cdot e_H^{\sigma-1} \cdot p_H^{-\sigma} \cdot \delta}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} + \delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)} \tag{2.4}$$

På baggrund af (A.5) kan fC_H opskrives på log-lineær form.

$$\log\left(fC_H\right) = \log\left(fC_{xH}\right) - \sigma \log\left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right) + \log\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) + (1-\sigma)\log\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right) \tag{2.5}$$

I ADAM bruges ikke boligforbruget, men boligkapitalen. Det antages derfor at boligforbruget og boligkapitalen er proportionale, hvormed den ønskede boligkapital kan opskrives på samme måde (med ADAM variable indsat)

$$\log\left(fkbhw\right) = \log\left(fCpuxh\right) - \sigma \log\left(\frac{phk \cdot buibhx}{pcpuxh}\right) + kons\tan t + (1-\sigma)\log\left(\frac{e_{xh}}{e_h}\right) \tag{2.6}$$

p_H er prisen for at have en bolig i et år, altså usercost (dvs. usercostraten gange kontantprisen på et enfamilieshus).
Effektivitetsindeksene defineres på følgende måde

$\log\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right) = \frac{\zeta}{1-\sigma} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{e^{0.014956 \cdot t - 25.14886}}{e^{4.3}}\right)^{-25}}$, hvor ζ er koefficienten, der skal estimeres. Denne trend er kalibreret for at forklare stigningen i boligmængden i 70'erne, jf. ADAMbogen kap. 3.
Samlet fås

$$\log\left(fkbhw\right) = \log\left(fCpuxh\right) - \sigma \log\left(\frac{phk \cdot buibhx}{pcpuxh}\right) + kons\tan t + \zeta \frac{1}{1+\left(\frac{e^{0.014956 \cdot t - 25.14886}}{e^{4.3}}\right)^{-25}} \tag{2.7}$$

Vi vil gerne udlede *phk* i ligevægt fra vores nuværende model. *Phk* har både en kortsigts og en langsigts ligevægt. I standard teori er boligmængden fast på kort sigt. Ved et stød til f.eks. efterspørgslen vil boligmængden ikke kunne tilpasse sig, mens boligprisen tilpasser sig med det samme. I den virkelige verden vil boligprisen typisk ikke tilpasse sig øjeblikkeligt, men bruge noget

[3] Dette ses ved at isolere C i (A.9) fra bilaget og indsætte i (A.7).

tid på at tilpasse sig. *Phk* lander derfor i sin kortsigtsligevægt efter et par år. *Phk* bestemmes på kort sigt ud fra efterspørgslen efter bolig, da boligmængden som sagt er fast.
På lang sigt bestemmes *phk* af Tobins q. Boligmængden tager tilpasningen og for at finde ligevægten skal man se på hvornår denne ikke længere påvirkes af boligprisen.
På lang sigt bliver ligevægtsværdien for *phk*

$$phk = e^{-konst} \cdot \left(0.8 pibh + 0.2 phgk\right) \tag{2.8}$$

Ligevægts *phk* udledes i bilag B. Det bemærkes, at *phk* på lang sigt skal være mindre end anskaffelsesprisen på en bolig (0.8*pibh* + 0.2*phgk*). Dette skyldes, at alle tre størrelser er indekseret til at være 1 i år 2005. At *phk* skal være mindre end anskaffelsesprisen, skyldes, at *phk* var for stor i forhold til denne i 2005 i forhold til ligevægt.

3. En boligmodel med land

Vi prøver nu at inkorporere en ligning for bestemmelse af grundprisen i boligmodellen ved at lave et yderligere nest. En bolig består som sagt af land, som vi fremover kalder grund, G, og kapital, K. Vi kalder fremover boligmængden for H (og dermed den optimale boligmængde for H*), mens kapital/grund aggregatet kaldes for KG(med stjerne som suffiks når der er tale om det optimale aggregat). Der gælder følgende sammenhæng.

$$fC_H = CES\left(fC_G, fC_K\right) \approx Laspeyres\left(fC_G, fC_K\right)$$

Ydermere definerer vi følgende ADAM variable. *fbh* er et aggregat af kapital og grund og kan tolkes som en bolig mængde. *fbhu* er nytten af forbruget af bolig (svarende til fC_h). *fbhuw* er det ønskede forbrug af bolig (svarende til fC_h i ligevægt).

Ligningen for den grundpris, der clearer markedet, (efterspørgslen efter grunde) udledes i bilag C og bliver

$$\log\left(p_G\right) = \frac{\theta_G}{\sigma_G} + \log\left(phk\right) - \frac{1}{\sigma_G}\log\left(\frac{fG}{fKG}\right) - \log\left(\frac{buc_G}{buc_H}\right) \tag{3.1}$$

Efterspørgslen efter bolig ændres ikke og er fortsat

$$\log\left(fC_H\right) = \log\left(fC_{xH}\right) - \sigma\log\left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right) + \log\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) + \left(1-\sigma\right)\log\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right) \tag{3.2}$$

Vi har nu et boligforbrug, *fbhuw*, som derfor indsættes i stedet for *fkbhw* som tidligere. Samtidig kaldes sigma for σ_C for ikke at forveksle den med sigma fra grundprisligningen, som kaldes σ_G.

$$\log\left(fbhuw\right) = \log\left(fCpuxh\right) - \sigma_C \log\left(\frac{phk \cdot buibhx}{pcpuxh}\right) + kons\tan t + \zeta \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{e^{0.014956 \cdot t - 25.14886}}{e^{4.3}}\right)^{-25}}$$

(3.3)

Trenden skal rekalibreres for at passe til den nye efterspørgsel. Dette gøres i et senere papir. Foreløbig arbejdes der bare med den samme trend som hidtil.

Det ses af (C.9), at hvis vi binder substitutionselasticiteten, σ_G, til at være 0 – ligesom i den nuværende boligmodel – så vil efterspørgslen efter grunde være proportional med bolig aggregatet, og dermed vil det faste forhold bibeholdes. Vi får altså samme resultat med det nye nest, hvis vi pålægger de samme restriktioner. Det er et godt tegn.

Yderligere er der indført en ny formulering af nyprisen på en bolig. Hidtil har andelene til hhv. kapital og grund været faste i modellen. Dette har ikke været tilfældet i virkeligheden, hvor bygningskapitalens andel har været faldende fra 1993 til 2006 og nåede under 50 %, jf. SOA29911. Den nuværende formulering af kapitalakkumulationsligningen er

$$d\log\left(fKbh\right)=\alpha_3 d\log\left(\frac{phk}{0.8\cdot pibh+0.2\cdot phgk}\right)+\gamma_2\log\left(\frac{phk_{-1}}{0.8\cdot pibh_{-1}+0.2\cdot phgk_{-1}}\right)$$
$$+kortsigtsdynamik+trend$$

hvor prisen på at bygge en ny bolig er 0.8**pibh*+0.2**phgk*.
Vi ændrer kapitalligningen til at være

$$d\log\left(fKbh\right)=\alpha_3 d\log\left(\frac{phk}{pbh}\right)+\gamma_2\left(\log\left(\frac{phk_{-1}}{pbh_{-1}}\right)+konst\right)+kortsigtsdynamik+trend \tag{3.4}$$

hvor

$$pbh=pbh_{-1}\frac{phgk\cdot fGbh+pibh\cdot fKbh}{phgk_{-1}\cdot fGbh+pibh_{-1}\cdot fKbh} \tag{3.5}$$

Den nye byggepris bliver nu *pbh*. Denne er i højere grad dynamisk, så forholdet mellem grund og kapital kan ændre sig, hvilket var et af formålene med at lave et yderligere nest. På den måde bliver *phk* i ligevægt på lang sigt nu

$$\log\left(phk\right)=\log\left(pbh\right)-konst \tag{3.6}$$

Dette er det samme som i (2.7) blot er omkostningsandelene til hhv. grunde og kapital nu frie. Det bemærkes her, at *pbh* også er indekseret til at være 1 i år 2005.

Prisstigningen i *phk* kan opskrives som prisstigningen i *phgk* og *pibh* vægtet med deres omkostningsandele. Dette kan vises vha. (3.6).

$$\frac{pbh}{pbh_{-1}}=\frac{phgk\cdot fGbh+pibh\cdot fKbh}{phgk_{-1}\cdot fGbh+pibh_{-1}\cdot fKbh}$$
$$\frac{pbh}{pbh_{-1}}=\frac{phgk}{phgk_{-1}}\cdot\underbrace{\frac{phgk_{-1}\cdot fGbh}{phgk_{-1}\cdot fGbh+pibh_{-1}\cdot fKbh}}_{1-\eta}+\frac{pibh}{pibh_{-1}}\cdot\underbrace{\frac{pibh_{-1}\cdot fKbh}{phgk_{-1}\cdot fGbh+pibh_{-1}\cdot fKbh}}_{\eta}$$
$$\frac{pbh}{pbh_{-1}}=\frac{phgk}{phgk_{-1}}\cdot\left(1-\eta\right)+\frac{pibh}{pibh_{-1}}\cdot\eta \tag{3.7}$$

4. Teoretiske forskelle

Når man har bygget grunde ind som en eksplicit størrelse, er man nødt til at antage noget om, hvordan disse opfører sig fremadrettet for at kunne fremskrive. Man kan enten antage, at der er en fast mængde af grunde (f.eks. kan Danmarks grundareal ikke blive større blot, fordi der er en større efterspørgsel efter bolig), eller man kan antage at mængden af grunde godt kan stige (f.eks. udlægges mere landbrugsjord til bebyggelse, når efterspørgslen stiger). Samtidig er det relevant med hvilken "hastighed" grundmængden stiger. Stiger grundmængden i takt med boligmængden, eller stiger den enten hurtigere eller lavere, og er stigningen dermed efterspørgselsbestemt? Antagelserne, man lægger ned over grundmængden, er altafgørende i forhold til hvilke egenskaber, modellen giver.

Der ses på et stød til forbruget eksklusiv bolig. Dette svarer til et positivt efterspørgselsstød. På kort sigt kan boligmængden ikke give sig. Ligevægten gives derfor ud fra *phk*. Der ses på ligning (3.2). Når *fCpuxh* stiger, da vil højresiden stige. For at ligningen skal balancere må venstresiden stige, eller et andet sted på højresiden må ændre sig så højresiden samlet falder tilbage. I ligevægt er log(*fbhw*)=log(*fbh*). Når boligmængden ikke kan give sig, kan den ønskede boligmængde heller ikke give sig i ligevægt. Derfor må *phk* stige for at balancere (3.2). Dette giver et videre udslag i grundprisen i ligning (3.1). Når *fCpuxh* stiger med 1 %, stiger *phk* med $\frac{1}{\sigma_C}$ %[4], hvilket får *phgk* til at stige med $\frac{1}{\sigma_C}$ %. Dette sker som sagt på kort sigt, når boligmængden ikke kan give sig. Det er samtidig præcis det samme, der sker, når man bygger grunden ind som i den nuværende boligmodel.

Når man ser på det lange sigt, hvor både grundmængden og kapitalmængden kan give sig, er *phk* igen givet ud fra (3.6). Stigningen i *pbh* kan skrives som et vægtet gennemsnit af stigningen i *pibh* og *phgk*, jf. (3.7). Dette kan, da alle er indekserede, omskrives til følgende

$$phk \approx pibh^{\eta} \cdot phgk^{1-\eta} \tag{4.1}$$

Når usercostraterne antages konstant, kan resten af ligning (3.1) indsættes i (4.1).

$$phk \approx pibh^{\eta} \cdot \left(phk \cdot \left(\frac{fbhu}{fgbh} \right)^{\frac{1}{\sigma_G}} \right)^{1-\eta}$$ [5]

$$phk^{\eta} \approx pibh^{\eta} \cdot \left(\frac{fbhu}{fgbh} \right)^{\frac{1-\eta}{\sigma_G}}$$

[4] Dette ses også af (B.1).

[5] Det antages, at den nytte, man får af bolig inkl. grund er proportional med Laspeyres aggregatet af grund og kapital.

$$phk \approx pibh \cdot \left(\frac{fbhu}{fgbh} \right)^{\frac{1-\eta}{\eta \cdot \sigma_G}} \quad [6] \qquad (4.2)$$

Af dette kan udledes følgende:

- Når η er 1, følger *phk* prisen på kapital. Dette følger helt naturligt af definitionen af η. Når denne er 1, da er anskaffelsesprisen på en ny bolig udelukkende prisen for huset.
- Når σ_G går mod uendelig, følger *phk* også *pibh*. Her er kapital og grunde perfekte substitutter, og phgk vil blot følge *phk*. Derfor må *phk* følge *pibh*.
- Når *fgbh* følger *fbhu*, da vil *phgk* igen følge *phk*, og *phk* vil følge *pibh*.

Når vi ikke er i et af disse tilfælde, da vil der være permanente effekter på *phk* af permanente forskydninger i *fbhu/fgbh* forholdet. Jf. (C.9) vil grundmængden for givne priser stige i samme takt som boligmængden ved et efterspørgselsstød, og der vil i dette tilfælde ikke være nogen langsigtede effekter på boligprisen. Ligningen giver dermed mængden for flydende grundmængde, men er grundmængden fast, giver den prisen.

Hvis grundmængden antages fast, og vi dermed har brugt al den jord, der ikke er fredet eller nødvendig for, at vi kan få noget at spise, da ses af (4.2), at der vil være en permanent positiv effekt på boligprisen, fordi *fbh* giver sig ved et efterspørgselsstød. Hvor stor en effekt et efterspørgselsstød har på grundprisen afhænger af substitutionselasticiteten, hvilket ses af (4.2). I vores model er det antaget, at den ikke er 0. Den estimeres dog generelt til at være lille, hvilket betyder, at et efterspørgselsstød vil have en stor effekt på grundprisen. Pt. bliver den ved nye grundpriser og med denn formulering af modellen estimeret til at være ca. 0.2. Dette giver (ved at vende ligningen), at hvis grundmængden er fast, da vil en 1 % stigning i efterspørgslen give en 5 % stigning i grundprisen.
Da *phk* består af både *pibh* og *phgk*, skal *phgk* være større end *phk* i ligevægt (når grundmængden er fast). Dette sker, da *pibh* ikke ændres. Da man ikke kan ændre mængden/størrelsen af grundene, er man nødt til at bygge mere kapital, hvis man vil have mere bolig. Dette forskyder andelene af grunde og kapital, men ikke nødvendigvis omkostningsandelene.

På lang sigt antages der i ADAM konstant realvækst og inflation større end 0. I den nuværende model er der modelleret et balanceret vækst scenarie. Alle eksogene priser samt udlandets priser er sat til at stige med 2 % om året. *Phk* stiger da også med 2 % om året jf. (4.2), da det er implicit antaget at *fGbh* følger *fbhu*.

Dette bliver ikke tilfældet, når grundmængden er fast. Vi tager igen udgangspunkt i (4.2) og indsætter for *fbhu*, som i ligevægt er *fbhuw*. Dette gøres i bilag D.

[6] Denne er forstørret, så man kan se parametrene og deres fodtegn.

Tager man udgangspunkt i (D.1), kan man finde *phk*s vækstrate. Dette ses i (4.3). Her er fjernet de led, der er konstante[7].

$$\Delta \log(phk) \approx \frac{\Delta \log(pibh) + \frac{1-\eta}{\eta \cdot \sigma_G} \cdot \left(\Delta \log(fCpuxh) + \sigma_C \Delta \log(pcpuxh) - \Delta \log(fGbh)\right)}{1 + \frac{(1-\eta)\sigma_C}{\eta \cdot \sigma_G}} \tag{4.3}$$

Dette kan omskrives til

$$\begin{aligned} \Delta \log(phk) \approx \Delta \log(pibh) &+ \frac{1}{\frac{\eta \cdot \sigma_G}{1-\eta} + \sigma_C}\left(\Delta \log(fCpuxh) - \Delta \log(fGbh)\right) \\ &- \frac{1}{\frac{\eta \cdot \sigma_G}{(1-\eta)\sigma_C} + 1}\left(\Delta \log(pibh) - \Delta \log(pcpuxh)\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Historisk set har *pibh* og *pcpuxh* haft meget ens vækstrater, og sidste led er derfor meget småt. I et stiliseret vækstforløb er de antaget ens.
Når grundmængden holdes fast, bliver vækstraten i *phk* dermed større end vækstraten i *pibh*, da privatforbruget ekskl. bolig stiger.
I en simuleret model med fast grundmængde, hvor priser vokser med 2 % og mængder vokser med 1,5 %, kommer *phk* til at vokse med mere end 5 % om året – altså væsentligt mere end i basisscenariet, hvor den ligesom alle andre priser vokser med 2 %. Dette er, når σ_C estimeres til 0.45, σ_G til 0.205 og η kan så udregnes til 0.196.

Konklusion

Det teoretiske grundlag for boligmodellen er blevet samlet i dette papir. Samtidig er det teoretiske grundlag udvidet til at have bolig som et nest af kapital og land. Papiret er lavet som forpapir til et papir, hvor denne udvidelse kommes ind i boligmodellen, estimeres og aftestes.

Kilder:

”Nice to know about CES functions” (preliminary) af Ferdinand Mittermaier, University of Munich
ADAM-bogen (2012)
GRH06807
GRH10510
GRH20110
JAO28N01
SOA29911
THV01806

[7] Konstantleddet, usercostraten samt trenden, der ikke er konstant, men som har en vækst meget tæt på 0

A. Udledning af optimalt boligforbrug

Først opskrives problem (1.3) på Lagrange form. Herefter løses Lagrange funktionen.

$$L = A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \lambda\left(\overline{C} - \left(p_H \cdot fC_H + p_{xH} \cdot fC_{xH}\right)\right)$$

(A.1)

$$\frac{\partial L}{\partial fC_H} = \frac{\sigma}{\sigma-1} A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \delta^{\frac{1}{\sigma}} \frac{\sigma-1}{\sigma} e_H^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_H^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} - \lambda p_H = 0$$

$$A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \delta^{\frac{1}{\sigma}} e_H^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_H^{-\frac{1}{\sigma}} = \lambda p_H$$

(A.2)

$$\frac{\partial L}{\partial fC_{xH}} = \frac{\sigma}{\sigma-1} A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}} \frac{\sigma-1}{\sigma} e_{xH}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_{xH}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1}$$
$$- \lambda p_{xH} = 0$$

$$A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}} e_{xH}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_{xH}^{-\frac{1}{\sigma}} = \lambda p_{xH}$$

(A.3)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \overline{C} - p_H \cdot fC_H - p_{xH} \cdot fC_{xH} = 0$$
$$\overline{C} = p_H \cdot fC_H + p_{xH} \cdot fC_{xH}$$

(A.4)

$$\frac{A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \delta^{\frac{1}{\sigma}} e_H^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_H^{-\frac{1}{\sigma}}}{A\left(\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H fC_H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH} fC_{xH}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}} e_{xH}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_{xH}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\lambda p_H}{\lambda p_{xH}}$$

$$\frac{\delta^{\frac{1}{\sigma}} e_H^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_H^{-\frac{1}{\sigma}}}{(1-\delta)^{\frac{1}{\sigma}} e_{xH}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} fC_{xH}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{p_H}{p_{xH}}$$

$$\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{e_H}{e_{xH}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(\frac{fC_{xH}}{fC_H}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{p_H}{p_{xH}}$$

$$\left(\frac{fC_{xH}}{fC_H}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{p_H}{p_{xH}}\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$\frac{fC_{xH}}{fC_H} = \left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right)^{\sigma} \frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right)^{\sigma-1} \tag{A.5}$$

Forbrugeren vil således fordele sit forbrug på de to forbrugsgrupper i forhold til priserne på forbrug, nyttevægten samt effektivitetsindeksene.
Fra (A.5) kan fC_{xH} udledes og (2.2) indsættes for at finde fC_{xH} og fC_H.

$$fC_{xH} = \left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right)^{\sigma} \frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right)^{\sigma-1} fC_H$$

$$fC_{xH} = \frac{C - p_H \cdot fC_H}{p_{xH}} \tag{A.6}$$

$$\left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right)^{\sigma} \frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right)^{\sigma-1} fC_H = \frac{C - p_H \cdot fC_H}{p_{xH}}$$

$$\left(\left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right)^{\sigma} \frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right)^{\sigma-1} p_{xH} + p_H\right) \cdot fC_H = C$$

$$fC_H = \frac{C}{\left(\left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right)^{\sigma} \frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{e_{xH}}{e_H}\right)^{\sigma-1} p_{xH} + p_H\right)}$$

$$fC_H = \frac{C \cdot e_H{}^{\sigma-1}}{\left(\left(\frac{p_H}{p_{xH}}\right)^{\sigma} \frac{1-\delta}{\delta} e_{xH}{}^{\sigma-1} p_{xH} + p_H \cdot e_H{}^{\sigma-1}\right)}$$

$$fC_H = \frac{C \cdot e_H{}^{\sigma-1} \cdot p_H{}^{-\sigma}}{\left(\frac{1-\delta}{\delta} e_{xH}{}^{\sigma-1} p_{xH}{}^{1-\sigma} + p_H{}^{1-\sigma} \cdot e_H{}^{\sigma-1}\right)}$$

$$fC_H = \frac{C \cdot e_H{}^{\sigma-1} \cdot p_H{}^{-\sigma} \cdot \delta}{\left((1-\delta) e_{xH}{}^{\sigma-1} p_{xH}{}^{1-\sigma} + \delta p_H{}^{1-\sigma} \cdot e_H{}^{\sigma-1}\right)}$$

$$fC_H = \frac{C \cdot e_H{}^{\sigma-1} \cdot p_H{}^{-\sigma} \cdot \delta}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} + \delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)} \tag{A.7}$$

(A.7) indsættes i (A.6) for at finde fC_{xH}.

$$fC_{xH} = \frac{C - p_H \cdot \dfrac{C \cdot e_H{}^{\sigma-1} \cdot p_H{}^{-\sigma} \cdot \delta}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} + \delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}}{p_{xH}}$$

$$fC_{xH}=\frac{C\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)-p_H{}^{1-\sigma}\cdot C\cdot e_H{}^{\sigma-1}\cdot\delta}{p_{xH}\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}$$

$$fC_{xH}=\frac{C\left(1-\delta\right)p_{xH}{}^{1-\sigma}e_{xH}{}^{\sigma-1}+C\cdot p_H{}^{1-\sigma}\cdot e_H{}^{\sigma-1}\cdot\delta-p_H{}^{1-\sigma}\cdot C\cdot e_H{}^{\sigma-1}\cdot\delta}{p_{xH}\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}$$

$$fC_{xH}=\frac{C\left(1-\delta\right)p_{xH}{}^{-\sigma}e_{xH}{}^{\sigma-1}}{\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)} \tag{A.8}$$

Dette giver følgende nytte

$$U\left(fC_H,fC_{xH}\right)=A\left(\begin{array}{l}\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_H\frac{C\cdot e_H{}^{\sigma-1}\cdot p_H{}^{-\sigma}\cdot\delta}{\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\\ \left(1-\delta\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left(e_{xH}\frac{C\left(1-\delta\right)p_{xH}{}^{-\sigma}e_2{}^{\sigma-1}}{\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\end{array}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H,fC_{xH}\right)=A\left(\begin{array}{l}\delta^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{C\cdot\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{-\sigma}\cdot\delta}{\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\\ +\left(1-\delta\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{C\cdot\left(1-\delta\right)\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{-\sigma}}{\left(\left(1-\delta\right)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\end{array}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A\left(\left(\frac{C\cdot\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{-\sigma}\cdot\delta^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left(\frac{C\cdot(1-\delta)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{-\sigma}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A\left(C^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(\left(\frac{\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{-\sigma}\cdot\delta^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left(\frac{(1-\delta)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{-\sigma}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A\cdot C\left(\left(\frac{\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{-\sigma}\cdot\delta^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left(\frac{(1-\delta)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{-\sigma}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}+\delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A \cdot C \left(\frac{\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma} \cdot \delta}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} + \delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} + \frac{(1-\delta)\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} + \delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A \cdot C \left(\frac{\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma} \cdot \delta + (1-\delta)\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma}}{\left((1-\delta)\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} + \delta\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A \cdot C \left(\left(\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma} \cdot \delta + (1-\delta)\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$U\left(fC_H, fC_{xH}\right) = A \cdot C \left(\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma} \cdot \delta + (1-\delta)\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \qquad \text{(A.9)}$$

Normeres denne til 1, kan man udlede et fælles pris indeks, P, ved at løse for C. C vil da være prisen på 1 U. Ideen bag er, at hvis man antager konstant skalaafkast, da vil man så kende omkostningerne ved et hvilket som helst nytteniveau, der blot vil være P*U.

$$1 = A \cdot C \left(\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma} \cdot \delta + (1-\delta)\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$P = C = A^{-1} \cdot \left(\left(\frac{p_H}{e_H}\right)^{1-\sigma} \cdot \delta + (1-\delta)\cdot\left(\frac{p_{xH}}{e_{xH}}\right)^{1-\sigma} \right)^{-\frac{1}{\sigma-1}} \qquad \text{(A.10)}$$

B. Udledning af *phk* i ligevægt

Først udledes ligevægtsværdien for *phk* på kort sigt. Der tages derfor udgangspunkt i ligningen for boligefterspørgsel.

$$\log(fkbhw) = \log(fCpuxh) - \sigma \log\left(\frac{phk \cdot buibhx}{pcpuxh}\right) + kons\tan t + \varsigma \cdot trend$$

$$\sigma \log(phk) = -\log(fkbhw) + \log(fCpuxh) - \sigma \log\left(\frac{buibhx}{pcpuxh}\right) + kons\tan t + \varsigma \cdot trend$$

$$\log(phk) = \frac{1}{\sigma}\left(-\log(fkbhw) + \log(fCpuxh) - \sigma \log\left(\frac{buibhx}{pcpuxh}\right) + kons\tan t + \varsigma \cdot trend\right)$$

$$\log(phk) = \log(pcpuxh) - \log(buibhx) + \frac{1}{\sigma}\log(fCpuxh) - \frac{1}{\sigma}\log(fkbhw) + \frac{1}{\sigma}(kons\tan t + \varsigma \cdot trend) \tag{B.1}$$

$$phk = e^{\log(pcpuxh) - \log(buibhx) + \frac{1}{\sigma}\log(fCpuxh) - \frac{1}{\sigma}\log(fkbhw) + \frac{1}{\sigma}(kons\tan t + \varsigma \cdot trend)} \tag{B.2}$$

Herefter udledes ligevægtsværdien for *phk* på lang sigt. Her tages udgangspunkt i ligningen for boligkapitalen. På lang sigt er dlog(*phk*) fast. Dermed påvirker *phk* kun boligkapitalen gennem leddet $\left(\log\left(\frac{phk_{-1}}{0.8pibh_{-1} + 0.2phgk_{-1}}\right) + konst\right)$. Dette leades en periode og sættes lig 0, hvorefter *phk* udledes.

$$\left(\log\left(\frac{phk}{0.8pibh + 0.2phgk}\right) + konst\right) = 0$$

$$\log(phk) - \log(0.8pibh + 0.2phgk) + konst = 0$$

$$\log(phk) = \log(0.8pibh + 0.2phgk) - konst$$

$$phk = e^{\log(0.8pibh + 0.2phgk) - konst}$$

$$phk = e^{-konst} + (0.8pibh + 0.2phgk) \tag{B.3}$$

C. Udledning af optimalt forbrug af hhv. grunde og kapital

Vi kan udlede efterspørgslen efter grunde på samme måde, som vi udledte efterspørgslen efter bolig. fK angiver kapitalmængden i faste priser, fG angiver grundmængden i faste priser, og KG angiver kapital/grund aggregatet i løbende priser. Først findes Lagrange funktionen (C.1), som derefter løses.

$$L = D\left(\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}} + (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}}\right)^{\frac{\sigma_G}{\sigma_G-1}} + \lambda\left(KG - \left(p_K \cdot fK + p_{GU} \cdot fG\right)\right) \tag{C.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial fB} = \frac{\sigma_G}{\sigma_G - 1} D\left(\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}} + (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}}\right)^{\frac{\sigma_G}{\sigma_G-1}-1} \theta^{\frac{1}{\sigma_G}} \frac{\sigma_G - 1}{\sigma_G} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}-1} - \lambda p_K = 0$$

$$D\left(\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}} + (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}}\right)^{\frac{1}{\sigma_G-1}} \theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{-\frac{1}{\sigma_G}} = \lambda p_K \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial fG} = \frac{\sigma_G}{\sigma_G - 1} D\left(\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}} + (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}}\right)^{\frac{\sigma_G}{\sigma_G-1}-1} (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} \frac{\sigma_G - 1}{\sigma_G} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}-1} - \lambda p_{GU} = 0$$

$$D\left(\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}} + (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}}\right)^{\frac{1}{\sigma_G-1}} (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{-\frac{1}{\sigma_G}} = \lambda p_{GU} \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = KG - p_K \cdot fK - p_{GU} \cdot fG = 0$$

$$KG = p_K \cdot fK + p_{GU} \cdot fG \tag{C.4}$$

$$\frac{D\left(\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}} + (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}}\right)^{\frac{1}{\sigma_G-1}} \theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{-\frac{1}{\sigma_G}}}{D\left(\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}} + (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{\frac{\sigma_G-1}{\sigma_G}}\right)^{\frac{1}{\sigma_G-1}} (1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{-\frac{1}{\sigma_G}}} = \frac{\lambda p_K}{\lambda p_{GU}}$$

$$\frac{\theta^{\frac{1}{\sigma_G}} fK^{-\frac{1}{\sigma_G}}}{(1-\theta)^{\frac{1}{\sigma_G}} fG^{-\frac{1}{\sigma_G}}} = \frac{p_K}{p_{GU}}$$

$$\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\frac{1}{\sigma_G}} \left(\frac{fK}{fG}\right)^{-\frac{1}{\sigma_G}} = \frac{p_K}{p_{GU}}$$

$$\left(\frac{fG}{fK}\right)^{\frac{1}{\sigma_G}}=\frac{p_K}{p_{GU}}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\sigma_G}}$$

$$\frac{fG}{fK}=\left(\frac{p_K}{p_{GU}}\right)^{\sigma_G}\frac{1-\theta}{\theta} \tag{C.5}$$

Fra (C.5) kan fK udledes og (C.4) indsættes for at finde fK og fG.

$$fK=\left(\frac{p_K}{p_{GU}}\right)^{-\sigma_G}\frac{\theta}{1-\theta}\cdot fG$$

$$fK=\frac{KG-p_{GU}\cdot fG}{p_K} \tag{C.6}$$

$$\left(\frac{p_K}{p_{GU}}\right)^{-\sigma_G}\frac{\theta}{1-\theta}\cdot fG=\frac{KG-p_{GU}\cdot fG}{p_K}$$

$$\left(\left(\frac{p_K}{p_{GU}}\right)^{-\sigma_G}\frac{\theta}{1-\theta}\cdot p_K+p_G\right)\cdot fG=KG$$

$$fG=\frac{KG}{\left(\frac{p_K}{p_{GU}}\right)^{-\sigma_G}\frac{\theta}{1-\theta}\cdot p_K+p_{GU}}$$

$$fG=\frac{KG\cdot p_{GU}{}^{-\sigma_G}}{\frac{\theta}{1-\theta}\cdot p_K{}^{1-\sigma_G}+p_{GU}{}^{1-\sigma_G}}$$

$$fG=\frac{KG\cdot p_{GU}{}^{-\sigma_G}\left(1-\theta\right)}{\theta\cdot p_K{}^{1-\sigma_G}+\left(1-\theta\right)\cdot p_{GU}{}^{1-\sigma_G}} \tag{C.7}$$

Fordi problemet er symmetrisk, kan K opskrives tilsvarende. Denne skal dog ikke bruges i modellen og vil derfor ikke blive opskrevet her.
Samtidig er problemet identisk med problemet løst i appendiks A. Derfor kan følgende prisaggregat opskrives.

$$p_{KG}=D^{-1}\left(\theta\cdot p_K{}^{1-\sigma_G}+\left(1-\theta\right)\cdot p_{GU}{}^{1-\sigma_G}\right)^{-\frac{1}{\sigma_G-1}} \tag{C.8}$$

(C.7) opskrives nu på loglineær form.

$$\log\left(fG\right)=\log\left(KG\cdot p_{GU}{}^{-\sigma_G}\left(1-\theta\right)\right)-\log\left(\theta\cdot p_K{}^{1-\sigma_G}+\left(1-\theta\right)\cdot p_{GU}{}^{1-\sigma_G}\right)$$

$$\log\left(fG\right)=\log\left(KG\right)-\sigma_G\log\left(p_{GU}\right)+\log\left(1-\theta\right)-\log\left(\theta\cdot p_K{}^{1-\sigma_G}+\left(1-\theta\right)\cdot p_{GU}{}^{1-\sigma_G}\right)$$

Det sidste led kan omskrives vha. (C.8).

$$\log\left(fG\right)=\log\left(KG\right)-\sigma_G\log\left(p_{GU}\right)+\log\left(1-\theta\right)-\log\left(\left(p_{KG}\cdot D\right)^{1-\sigma_G}\right)$$

$$\log\left(fG\right)=\log\left(KG\right)-\sigma_G\log\left(p_{GU}\right)+\log\left(1-\theta\right)-\left(1-\sigma_G\right)\log\left(p_{KG}\right)-\left(1-\sigma_G\right)\log\left(D\right)$$

$$\log\left(fG\right)=\log\left(\frac{KG}{p_{KG}}\right)-\sigma_G\log\left(\frac{p_{GU}}{p_{KG}}\right)+\underbrace{\log\left(1-\theta\right)-\left(1-\sigma_G\right)\log\left(D\right)}_{\theta_G}$$

$$\log\left(fG\right)=\theta_G+\log\left(\frac{KG}{p_{KG}}\right)-\sigma_G\log\left(\frac{p_{GU}}{p_{KG}}\right) \tag{C.9}$$

Herfra kan grundprisen udledes, hvor uc_G er prisen på ydelsen G og dermed lig p_{GU} og uc tilsvarende er prisen på KG aggregatet og dermed lig usercost.

$$\log\left(fG\right)=\theta_G+\log\left(\frac{KG}{p_{KG}}\right)-\sigma_G\log\left(\frac{uc_G}{uc}\right)$$

$$\log\left(fG\right)=\theta_G+\log\left(fKG\right)-\sigma_G\log\left(\frac{p_G\cdot buc_G}{uc}\right)$$

$$\sigma_G\log\left(\frac{p_G\cdot buc_G}{uc}\right)=\theta_G+\log\left(fKG\right)-\log\left(fG\right)$$

$$\log\left(p_G\right)=\log\left(\frac{uc}{buc_G}\right)+\frac{1}{\sigma_G}\left(\theta_G+\log\left(fKG\right)-\log\left(fG\right)\right)$$

$$\log\left(p_G\right)=\frac{\theta_G}{\sigma_G}-\frac{1}{\sigma_G}\log\left(\frac{fG}{fKG}\right)-\log\left(\frac{buc_G}{uc}\right)$$

$$\log\left(p_G\right)=\frac{\theta_G}{\sigma_G}+\log\left(phk\right)-\frac{1}{\sigma_G}\log\left(\frac{fG}{fKG}\right)-\log\left(\frac{buc_G}{buc_H}\right) \tag{C.10}$$

D. Udledning af *phk* ved fast grundmængde.

$$\log(phk) \approx \log(pibh) + \frac{1-\eta}{\eta \cdot \sigma_g} \cdot \left(\log(fbhu) - \log(fgbh)\right)$$

$$\log(phk) \approx \log(pibh) + \frac{1-\eta}{\eta \cdot \sigma_g} \cdot \left(\begin{array}{l} \log(fCpuxh) - \sigma_C \log\left(\dfrac{phk \cdot buibhx}{pcpuxh}\right) \\ +kons\tan t + \zeta \cdot \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^{0.014956 \cdot t - 25.14886}}{e^{4.3}}\right)^{-25}} - \log(fgbh) \end{array} \right)$$

$$\log(phk) \approx \log(pibh) - \frac{(1-\eta)\sigma_C}{\eta \cdot \sigma_G} \log(phk) + \frac{1-\eta}{\eta \cdot \sigma_G} \cdot \left(\begin{array}{l} \log(fCpuxh) - \sigma_C \log\left(\dfrac{buibhx}{pcpuxh}\right) \\ +kons\tan t + \zeta \cdot \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^{0.014956 \cdot t - 25.14886}}{e^{4.3}}\right)^{-25}} - \log(fgbh) \end{array} \right)$$

$$\log(phk)\left(1 + \frac{(1-\eta)\sigma_C}{\eta \cdot \sigma_G}\right) \approx \log(pibh) + \frac{1-\eta}{\eta \cdot \sigma_G} \cdot \left(\begin{array}{l} \log(fCpuxh) - \sigma_C \log\left(\dfrac{buibhx}{pcpuxh}\right) \\ +kons\tan t + \zeta \cdot \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^{0.014956 \cdot t - 25.14886}}{e^{4.3}}\right)^{-25}} - \log(fgbh) \end{array} \right)$$

$$\log(phk) \approx \frac{\log(pibh) + \dfrac{1-\eta}{\eta \cdot \sigma_G} \cdot \left(\begin{array}{l} \log(fCpuxh) - \sigma_C \log\left(\dfrac{buibhx}{pcpuxh}\right) \\ +kons\tan t + \zeta \cdot \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^{0.014956 \cdot t - 25.14886}}{e^{4.3}}\right)^{-25}} - \log(fgbh) \end{array} \right)}{1 + \dfrac{(1-\eta)\sigma_C}{\eta \cdot \sigma_G}} \tag{D.1}$$