Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Grane Høegh

10. maj 2010

Ny formulering af faktorblokken

Resumé:

Dette er beskrivelsen af den nye faktorblok tilhørende ADAM version dec09. Dette papir udgør en samlet og komplet dokumentation af den nye faktorblok. Systemet er et nestet CES-system udvidet med trender, som noget nyt er systemet opskrevet med mere fri kortsigtet dynamik.

GRH10510

Nøgleord: Faktorblok

Modelgruppepapirer er interne arbejdspapirer. De konklusioner, der drages i papirerne, er ikke endelige og kan være ændret inden opstillingen af nye modelversioner. Det henstilles derfor, at der kun citeres fra modelgruppepapirerne efter aftale med Danmarks Statistik.

1. Indledning

Nu er den her endelig. Den samlede beskrivelse af den nye faktorblok. Denne gang i en ny og revideret version. Versionen er lagt ind i dec09, og udgør den nye faktorblok i ADAM. Dette papir kan læses, som dokumentationen til den nye faktorblok, og burde kunne stå alene.

Der har været flere ændringer under vejs. Denne proces er beskrevet i detaljer i afsnit 2. Afsnit 3 beskriver de nye brancher. Banen bliver i store træk ridset op i afsnit 4. Her forklares strukturen og tankegangen bag ved den nye faktorblok uden at gå i detaljer. Afsnit 5 viser ligevægten for det nye system. Stort set alt det tekniske er overladt til bilag. I afsnit 6 opsættes den dynamiske model, og der forklares hvad der sker uden for ligevægt. En kort diskussion vedrørende prisindeks følger i afsnit 7. Afsnit 8 forklarer, hvorledes systemet er estimeret. Der er ikke estimationsoutput med, da det er en mere generel oversigt. Det faktiske estimationsoutput med videre vil komme som et selvstændigt papir. Endelig gives en konklusion i afsnit 9.

2. Faktorblokkens udviklingshistorie, 2008-2010

Sidste gang der for alvor blev arbejdet på faktorblokken var i perioden 1991-1995. Her mundede det ud i et working paper af Thomas Thomsen kaldet ”Faktorblokkens udviklingshistorie, 1991-1995”. Dette afsnit kan ses som et lille appendiks til dette værk.

Grundlæggende var der tre ting ved faktorblokken, som jeg gerne ville lave om på. Det ene var en teoretisk inkonsistens. Energiforbruget og bygningskapitalen blev bestemt uafhængigt af de andre produktionsinput, men større priser betød mindre input. Herved ville øgede oliepriser sænke energiforbruget, men det er en ren produktionsgevinst, eftersom der ikke skal bruges mere af andre produktionsinput. Disse priseffekter har dog været så små, at de ikke har givet meget perverse effekter, såsom billigere samlet produktion ved stigende priser. Som den anden ting ville jeg gerne skrive faktorblokken op på en mere overskuelig måde. Jeg mener selv, at den nye faktorblok er lettere at læse. Indrømmet den er ikke utrolig let at læse, men den gamle formulering var meget tung. Den tredje ting var få ryddet op i trendgenereringssystemet. Et system som er meget tungt og uoverskueligt, men som blot mindsker residualerne i foreløbige år ved at ændre trenderne en smule.

For at få konsistens i systemet har jeg formuleret ligevægten, som et fuldt specificeret nestet CES-system. Dette kan enten gøres top-down eller bottom-up. Umiddelbart ville jeg gerne have samme struktur på forbrugssystem og faktorblok, og det virkede umiddelbart som om top-down var nemmest i forbrugssystemet. Endvidere er det den umiddelbart nemmeste (og normalt anvendte) måde at skrive CES-systemet op på. Derfor prøvede jeg først med et top-down system.

I et top-down system bestemmes først aggregatet af de samlede produktionsinput på baggrund af en overordnet TFP-trend og den samlede produktion. Herefter deles de aggregerede produktionsinput ud på faktorer. Det viste sig dog, at denne formulering gjorde det svært at støde til de enkelte produktionsinput på en fornuftig måde.

Derfor blev det besluttet at formulere det som et bottom-up system, hvor alle produktionsinput blev bestemt på baggrund af samlet produktion, relative priser og effektivitetstrender. Dette system er beskrevet i GRH15109, hvor effektivitetsjusteringen er samlet i bestemte trendled.

Det viste sig dog, at systemet beskrevet i GRH15109 kunne opskrives på en mere pædagogisk måde, hvilket også er blevet den (indtil videre) endelige formulering, som er beskrevet i dette papir. Dette system er testet og lagt ind i beta-versionen af dec09.

Der er sket en del mindre ændringer af faktorblokken. Vi har prøvet at gennemføre ændringerne i faktorblokken trinvist:

1. Ny branchegruppering jf. DKN08109.
2. Ny effektiv udlånsrente jf. RBJ06709.
3. Nettokapital erstatter bruttokapital.
4. Prisforventningerne er mere træge.
5. Den teoretiske korrekte koefficient bruges benyttes foran afskrivningerne.
6. Afskrivningsraterne i usercost erstattes af mere glatte forventede afskrivningsrater.
7. Dynamikken ændres fra 3. generation til 2. generationsdynamik.
8. CES-prisindekset erstattes af et Paascheprisindeks.

Implementeringen af disse ændringer trinvist er beskrevet i JNR01809. Dog er papiret skrevet på et tidspunkt, hvor vi troede, at vi ville benytte en top-down-struktur, så der er yderligere beskrevet to trin, som man kan se bort fra.

Prisforventninger er blevet mere træge. Dette er dog ikke nok til at fjerne perversiteterne ved at højere priser stadig giver tendens til umiddelbar lavere usercost – jf. GRH31806. Selvom problemet er mindre, så foreslås det at eksogenisere prisforventningerne efter grundforløbet er lagt fast, og inden der foretages stød.

Bruttokapitalen er fuldt ud erstattet med nettokapitalen i den produktive process. Dette skyldes den dårlige datamæssige sammenhæng mellem investeringer og bruttokapital, som giver utroværdige afgangsrater. Hermed er bruttokapital og afgangsrater afskaffet fra modellen.

Usercost har ændret sig en del. For det første er usercost for nettokapitalen nu den interessante størrelse, hvilket gør beregningen simplere. Jeg er gået tilbage til den mere traditionelle måde at opskrive usercost, som minder om den fra juli05. Dog er afskrivningsraten blevet udglattet, og den halve foran inflationsforventningerne er udskiftet med en minus den udglattede afskrivningsrate. For yderligere diskussion af det nye usercostbegreb henvises til GRH08O08.

Endelig er dynamikken skrevet op på en ny måde. For det første er tredjegenerationsdynamikken helt skrottet. Alle ligninger er nu opskrevet med andengenerationsdynamik. Endvidere er ligningerne vækstkorrigerede. Denne forskel udmønter sig i variablen $r\langle i\rangle, i = hq, fknm, fve, fknb, fvm$, som afspejler trendvæksten i variablen. Dette gør, at faktorinputtet på en balanceret vækststi vil være lig sin ønskede mængde – dvs. man kan regne med at $Hq \rightarrow Hqw$ osv. For yderligere forklaring om vækstkorrektion fås i GRH09909 og TMK22O09.

3. De nye erhvervsgrupper

Fordelen ved den nye erhvervsgruppering er, at der er færre brancher, og at brancherne ikke er afhængige af tal på 130-erhvervsgruppering. Det er muligt at få dannet data på baggrund af 56-grupperingen, hvilket hjælper betydeligt især til dannelsen af kapitaltal.

Tabel 3.1. Brancheopdeling i ADAM, fra 19 til 12

	Nuværende	Foreslået
1. Landbrug m.v.	a 011009,011209,014000, 020000,050000	1. a
2. Råolie m.v.	e 110000	2. e1* +140009
3. Olieraffinaderier.....	ng 230000	3. ng
4. El, gas, fjernvarme	ne 401000,402000,403000	4. ne1* +410000
5. Næringsmidler........	nf 151000,152000,153000, 154000,155000,156009, 158109,158120,158300	5. nnf
6. Nydelsesmidler	nn 159000,160000	
7. Lev. til byggeri.......	nb 140009,200000,263053, 266080	6. Diverse fremstilling: nz -140009+370000
8. Jern og metal..........	nm 271000,272030,274000, 275000,281009,286009, 291000,292000,293000, 294009,297000,300000, 310000,320000,330000	
9. Transportmidler......	nt 340000,351000,352050	
10. Kemisk	nk 241109,241209,241500, 241617,242000,243000,	

	244000,245070,251122, 252300,252400,362060	
11. Anden fremstilling..................	nq 170000,180000,190000, 210000,221200,221309, 222009,261126,361000	
12. Bygge- og anlæg	b 450001,450002,450003, 450004	7.b
13. Handel..................	qh 370000,501009,505000, 510000,521090,522990, 523000,524190,524490	8. Diverse tjenesteerhverv: qz -370000-410000
14. Anden transport m.v.	qt 601000,602100,602223, 602409,620000,631130, 634000,640000	
15. Andre tjenesteydende	qq 410000,502000,551009, 553009,701109,702040, 710000,721009,722000, 730001,741100,741200, 742009,744000,747000, 748009,804001,851209, 900010,900020,900030, 910000,920001,930009, 95	
16. Finansiel virksomhed	qf 651000,652000,660102, 660300,670000	9. qf
17. Søtransport............	qs 610000	10. qs
18. Boligbenyttelse	h 702009	11. h
19. Offentlige tjenester.......................	o 730002,751100,751209, 751300,752000,801000, 802000,803000,804002, 851100,853109,853209, 920002	12. o
Erhvervenes numre relaterer til nationalregnskabets erhvervsopdeling, der er gengivet i omstående bilagstabel taget fra den årsvise nationalregnskabspublikation. * Tabellen er kopieret fra DKN06209.		

4. Faktorblokken – overordnet set

I hver branche står virksomhederne overfor en bestemt efterspørgsel, som de vil imødekomme ved produktion bestående af 5 input: maskinkapital, arbejdskraft, energi, bygningskapital og materialer. De vil forsøge at sammensætte inputs således, at de i ligevægt minimere omkostningerne. De forskellige input er dog træge, og på vej mod ligevægt er det muligt, at producere med færre inputs end i ligevægt. Dette er dog ikke holdbart på langt sigt, og virksomhederne kan ikke planlægge efter det.

Faktorblokken består altså af en fejlkorrektionsligning for hver faktorinput til hver branche, hvor ligevægten er løsningen til et branchespecifikt omkostningsminimeringsproblem. Løsningen afhænger af produktionsfunktionen som antages at være en effektivitetsudvidet nestet CES-funktion. Udledningen af denne løsning for et generelt nest er givet i bilag A.

Der findes som 12 brancher i ADAM. De 9 af dem a, b, ne, nf, ng, nz, qf, qs og qz er givet ved strukturen i dette papir, mens de 3 sidste (e, h og o) er modelleret på særlig vis.

De 9 brancher beskrevet i dette papir har to forskellige nestningsstrukturer. De fleste brancher a, b, nf, nz, qf og nz har en KLEBM-nestningsstruktur, mens ne, ng og qs har en KLBME-nestningsstruktur. Fælles for de to strukturer er, at maskinkapital og arbejdskraft er de tætteste substitutter. I standardstrukturen kan aggragatet af disse to substitueres med energi. Baggrunden er, at man kan spare på energien ved at benytte mere kapital og arbejdskraft. I de tre specielle erhverv tænkes energi at substituere med aggregatet inklusiv bygninger og materialer. Baggrunden er, at energi i energiforsyningssektoren, hos olieraffinaderier og for søtransport er det primære input, som overordnet set er substitut til den anden produktion inklusiv alle produktionsinput. Thomas Thomsen har foreslået at neste energi og maskiner for fremstillingserhverv, da der her er tale om procesenergi. Alternativt kunne man gå i den modsatte retning og mere generelt have energi yderst, således ville det være nemmere at isolere BVT.

Formuleringen af modellen levner mulighed for substitution mellem bygninger og de nedre aggregater samt mellem materialer og de nedre aggregater. Det har dog for langt de fleste brancher ikke været muligt at finde empirisk belæg for sådanne substitutionseffekter, hvorfor de er bundet til at være 0 for alle brancher.

I modsætning til tidligere er et valgt at sortere efter branche og ikke input-type, da dette sikrer en mere overskuelig overblik over hele den branche-specifikke produktionsfunktion. Her er nf-erhvervet benyttet som eksempel, men ligninger er helt identiske for 5 af KLEBM-erhvervene: nf, nz, b, qf og qz. Landbruget, a, har fuldstændig samme struktur eneste undtagelse er at produktionen *fX* er høstkorrigeret. Selvom de 3 KLBME-erhverv (ne, ng og qs) ikke har samme nestningsstruktur, så er de skrevet op på fuldstændig tilsvarende måde hvor E blot er rykket yderst i nestningsstrukturen. Endelig er der undtagelserne: e, h og o, som i store træk er uændret ved denne modelversion. Eneste nævneværdige forskel er, at der ikke er nogen maskinkapital i h-erhvervet. Alt maskinkapital fra h-erhvervet er rykket til qz-erhvervet, da der ikke på 56-niveau er sondret mellem kapital til boliger og erhvervsboliger, og vi ikke ønsker et enkelt erhverv, hvor vi stadig skal stå for den dybe datagenerering.

5. Ligevægten for faktorblokken

Ligevægten for faktorblokken er for de enkelte brancher givet, som løsningen på disses omkostningsminimeringsproblemer. Jeg vil i det følgende bruge brancherne med KLEBM-nestningsstrukturen som udgangspunkt. Disse branchers produktionsfunktioner er opskrevet i bilag B. De er udledt på baggrund af den generelle formel i bilag A, men er skrevet op på en top-down agtig måde. Bilag C omskriver dette, så vi får en bottom-up struktur. Dette giver de forskellige faktorinput som:

$$\log fVmw = -\log dtm + \alpha_M - \sigma_M \log \frac{pvm/dtm}{pklebm} + \log fX \tag{5.1}$$

$$\log fKnbw = -\log dtb + \alpha_B - \sigma_B \log \frac{uib/dtb}{pkleb} - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} + \log fX \tag{5.2}$$

$$\log fVew = -\log dte + \alpha_E - \sigma_E \log \frac{pve/dte}{pkle} - \sigma_B \log \frac{pkle}{pkleb} - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} + \log fX \tag{5.3}$$

$$\log fKnmw = -\log dtk + \alpha_K - \sigma_K \log \frac{uim/dtk}{pkl} - \sigma_E \log \frac{pkl}{pkle} - \sigma_B \log \frac{pkle}{pkleb} - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} + \log fX \tag{5.4}$$

$$\log Hqw = -\log dtl + \alpha_L - \sigma_K \log \frac{l/dtl}{pkl} - \sigma_E \log \frac{pkl}{pkle} - \sigma_B \log \frac{pkle}{pkleb} - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} + \log fX \tag{5.5}$$

hvor *fVm* er materialeinput, *pvm* er prisen på materialeinput, *fX* er samlet produktion/output, *fKnb* er bygningskapital, *uib* er usercost for bygninger, *fVe* er energiinput, *pve* er prisen på energi, *fKnm* er maskinkapital, *uim* er usercost for maskiner, *Hq* er arbejdskraft og *l* er lønnen. Et *w* bagved en af disse størrelser angiver, at det er ligevægtsstørrelsen – den ønskede mængde. De effektivitetskorrigerede prisaggregater er givet ved: *pkl*, *pkle*, *pkleb* og *pklebm*, som er prisaggregater for (maskin)Kapital, Labour(/arbejdskraft), Energi, Bygninger og Materialer. Disse CES-prisindeks approksimeres med kædede Paascheprisindeks. De græske bogstaver er estimerede koefficienter. Endelig er *dtk*, *dtl*, *dte*, *dtb* og *dtm* effektivitetsindeks for maskinKapital, Labour, Energi, Bygninger og materialer.

Når branchens samlede efterspørgsel og produktion stiger med 1 pct., så vil også hver af faktorinputtene stige med 1 pct. Altså er produktionsfunktionen i ligevægt homogen af 1. grad. Hvis alle effektivitetsindeks stiger med en procent, så vil alle prisindeks falde med 1 procent. Herved er virkningen substitutionsneutral, og alle input vil falde med 1 procent.

Hvis lønnen falder med 1 procent, så vil det både påvirke *Hq* direkte gennem *l*, men det vil også påvirke samtlige prisindeks og hermed i teorien have indirekte effekter på *fVm*, *fKnb*, *fVe*, *Fknm* og *Hq*. For alle erhverv er substitutionselasticiteten for materialer og bygninger bundet til at være nul. Under estimationen viste det sig, at de estimerede elasticiteter næsten alle lå tæt på nul, hvor halvdelen var positive og halvdelen negative. Derfor vil *fVm* og *fKnb* være upåvirket af prisændringer – endvidere vil alle faktorinput også være upåvirket af *pvm* og *uib*. Modellen er dog formuleret, så substition nemt og hurtigt kan indføres i en ny modelversion, hvis man ønsker at påstulere en højere substituionselasticitet eller finder en bedre estimationsmetode.

Hvis effektivitetsindekset for arbejdskraft, *dtl*, øges med 1 procent, så vil arbejdskraftefterspørgslen falde, da man kan producere samme mængde med 1 procent mindre arbejdskraft. Til gengæld er prisen på en enhed effektiv arbejdskraft blevet en procent billigere, og der substitueres over til arbejdskraft. Nettoeffekten er, at efterspørgslen efter arbejdskraft falder, men pga. substitution med mindre end 1 procent, mens de andre substituerbare faktorinput (*fVe* og *fKnm*) falder pga. substitutionen.

6. Dynamisk formulering af faktorblokken

De forskellige ligevægtsfaktorinput er ligevægtsdelen af en fejlkorrektionsmodel:

$$\begin{aligned} D\log fVm = \phi_M D\log fVmwx + \mu_M D\log fX + gfvm \\ -\gamma_M\left(\log fVm_{-1} - \log fVmw_{-1}\right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} D\log fKnb = \phi_B D\log fKnbwx + \mu_B D\log fX + gfknb \\ -\gamma_B\left(\log fKnb_{-1} - \log fKnbw_{-1}\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} D\log fVe = \phi_E D\log fVewx + \mu_E D\log fX + gfve \\ -\gamma_E\left(\log fVe_{-1} - \log fVew_{-1}\right) \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} D\log fKnm = \phi_K D\log fKnmwx + \mu_K D\log fX + gfknm \\ -\gamma_K\left(\log fKnm_{-1} - \log fKnmw_{-1}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} D\log Hq = \phi_L D\log Hqwx + \mu_L D\log fX + ghq \\ -\gamma_L\left(\log Hq_{-1} - \log Hqw_{-1}\right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

hvor prisdelen er givet ved:

$$\log fVmwx = -\log dtm + \alpha_M - \sigma_M \log\frac{pvm/dtm}{pklebm} \tag{6.6}$$

$$\log fKnbwx = -\log dtb + \alpha_B - \sigma_B \log\frac{uib/dtb}{pkleb} - \sigma_M \log\frac{pkleb}{pklebm} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \log fVewx = -\log dte + \alpha_E - \sigma_E \log\frac{pve/dte}{pkle} - \sigma_B \log\frac{pkle}{pkleb} \\ -\sigma_M \log\frac{pkleb}{pklebm} \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} \log fKnmwx = -\log dtk + \alpha_K - \sigma_K \log\frac{uim/dtk}{pkl} - \sigma_E \log\frac{pkl}{pkle} \\ -\sigma_B \log\frac{pkle}{pkleb} - \sigma_M \log\frac{pkleb}{pklebm} \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\log Hqwx = -\log dtl + \alpha_L - \sigma_K \log\frac{l/dtl}{pkl} - \sigma_E \log\frac{pkl}{pkle} \\ -\sigma_B \log\frac{pkle}{pkleb} - \sigma_M \log\frac{pkleb}{pklebm}\end{aligned} \quad (6.10)$$

og ligevægten er givet ved:

$$\log fVmw = \log fVmwx + \log fX \quad (6.11)$$

$$\log fKnbw = \log fKnbwx + \log fX \quad (6.12)$$

$$\log fVew = \log fVewx + \log fX \quad (6.13)$$

$$\log fKnmw = \log fKnmwx + \log fX \quad (6.14)$$

$$\log Hqw = \log Hqwx + \log fX \quad (6.15)$$

Det meste notation er givet i afsnit 5. Det nye her er g-størrelserne: *gfvm*, *gfknb*, *gfve*, *gfknm* og *ghq*. Disse er trendkorrektionsled, som sikrer, at de faktiske størrelser er lig de såkaldte ligevægtsstørrelser i ligevægt. Trendkorrektionled er forklaret mere i detaljer i TMK22O09.

Ændringer i priser og effektivitetsindeks slår umiddelbart igennem med ϕ. Når ændrede relative priser og ændrede effektivitetsindeks tilsiger, at arbejdskraftefterspørgslen skal stige med 1 procent på langt sigt, så vil den stige med $0 \le \phi_L \le 1$ procent i år 1. Til gengæld vil *Hqw* stige med 1 procent og allerede i år 2 begynder fejlkorrektionen, hvor γ_L af uligevægten fjernes. Dette fortsætter de følgende år ,og *Hq* nærmer sig *Hqw*. Tilsvarende tilpasses ændringer i den samlede produktion *fX*, når den samlede produktion stiger 1 procent, så vil efterspørgslen efter arbejdskraft første år stige med $0 \le \mu_L \le 1$ procent, mens resten af tilpasningen sker gradvist. Det er altså tilladt, at pris- og mængdeændringer har en forskellig første år effekt, hvilket er nyt i forhold til den gamle faktorblok.

Når produktionen stiger 1 procent, så vil alle faktorinput på langt sigt stige med 1 procent, men denne tilpasning sker kun gradvist. Altså vil en øget produktion betyde, at man i en årrække kan producere mere omkostningseffektivt. Det dækker over, at arbejderne i en periode arbejder hårdere. Det er muligt for dem, at holde et højere arbejdstempo og/eller arbejde lidt over uden at registrere det – dog kun i en begrænset periode, som dog kan strække sig over flere år. Dette er teorien om labour hoarding. Når produktionen sænkes ønsker man pga. oplæringsomkostninger ikke at afskedige folk, men nedsætter deres arbejdsbyrde, så man har dem klar til at være produktive, når produktionen igen øges. Ud over arbejdskraften er også kapitalapparaterne træge. I en periode kan folk og maskiner være stuvet sammen i mindre lokaler, men det er ikke muligt at opretholde gode arbejdsvilkår i så små lokaler i længden. Samtidig kan man på kort sigt i højere grad deles om maskinkapitalen, men dette er ufleksibelt og mere belastende for både personale og maskiner.

Det nye i denne modelversion er, at vi har styrket konjunkturmedløbende produktivitet. Når produktionen stiger, så stiger produktiviteten i en periode, hvorefter den vender tilbage til udgangspunktet – og omvendt for en aftagende produktion. I den gamle modelversion, så skulle man efter 3 år kompensere fuldt ud med ekstra arbejdskraft for manglende maskinkapital. Denne egenskab er nu fjernet.

7. Prisindeks: CES vs. Paasche

Det har været en diskussion, om man skulle benytte CES-prisindeks eller Paasche-prisindeks. Fordelen ved CES-prisindeks er, at i ligevægten (som jo er en CES-ligevægt) er dette de – ifølge den opstillede model – korrekte prisindeks. Der er dog en del ulemper ved CES-prisindekset. Den første ulempe er, at når man er uden for ligevægt, så bliver de forskellige priskomponenter ikke vejet sammen med deres nuværende vægte, men med de vægte de har i ligevægt. Hermed fås ikke et retvisende billede af de faktiske års prisaggregater, når de faktiske størrelser ligger et stykke fra ligevægtsstørrelserne. Dette er især en ulempe, hvis brugerne vælger at ændre faktorblokken egenskaber gennem J-led, så det teoretiske prisindeks ikke følge disse korrektioner. En anden ulempe er, at prisindekset afhænger af estimerede substitutionselasticiteter for alle nests, hvilket stærkt besværliggør en trinvis estimation.

Paascheprisindekset har ikke de samme svagheder som CES-prisindekset. Det afspejler altid den nuværende sammensætning af komponenterne, og det er ikke-parametrisk – dvs. det afhænger ikke af estimerede parametre. Endvidere er det også standard at benytte det kædede Paascheprisindeks i Nationalregnskabet og i ADAM. Hermed vil man få de rigtige prisindeks, hvis man blot gør, som man plejer, hvilket er en dejlig simpel egenskab. Derfor er det valgt at benytte Paascheprisindeks i stedet for CES-prisindeks.

Det bør dog nævnes, at det i top-down systemer kan give anledning til inkonsistenser at vælge et andet prisindeks, da man ikke nødvendigvis vil have at omkostningskomponenterne summer til de samlede omkostninger. Dette er dog ikke et problem i faktorblokken, da de samlede omkostninger her blot er summen af omkostningskomponenterne.

8. Estimation af faktorblokken

Umiddelbart indgår de samme fem effektivitetsindeks i ligningerne for alle fem faktorinput. Hermed er rekursiv estimation af de forskellige faktorinput på baggrund af ligningerne i afsnit 6, hvor effektivitetsindeksene er frie trender, ikke muligt. Endvidere er der for få observationer til at estimere de fem faktorefterspørgsler simultant. Man kan dog opskrive systemet på en lidt andet måde. Dette gøres ved at approksimere prisindeksene med Törnqvist prisindeks – og isolere trenddelen af ligningen. Hvorledes effektivitetsjusterede og ikke-effektivitetsjusterede prisindeks hænger sammen er udledt i bilag D, mens ligningerne med ikke-effektivitetsjusterede prisindeks er givet i bilag E.

Når faktorblokken estimeres med disse lidt anderledes Törnqvist prisindeks i stedet for paasche kædede priser, så vil residualerne ikke matche 100 procent. Dog er forskellen meget lille. Forskellen i de forudsagte værdier afviger i det værste tilfælde med en kvart promille, så vi tør stadig stole på de estimerede værdier. Alternativt kunne man estimere trenderne ud fra denne metode – og herefter estimere på den modellerede måde med eksogene trender. Dette vil give overnesstemmende residualer og er nok en bedre måde, så det vil vi muligvis indbygge i fremtiden.

Grunden til, at vi ikke blot skriver det estimerede system ind i modellen, er, at vi ikke ønsker at fremskrive de enkelte faktorinputs trender som eksogene. Baggrunden for dette ønske er, at vi ved fremskrivninger af simple trender i faktorinputene ikke automatisk får de korrekte asymptotiske egenskaber. Især er der et ønske om, at 1) stabile efterspørgslesmønstre, 2) symmetri mellem lønvækst og arbejdskrafteffektivitet, og 3) vækst alene i arbejdskrafteffektiviteten – jf. GRH01908 – giver stabile lønkvoter.

Estimationen er beskrevet i yderligere detaljer i papirer specielt dedikeret til estimationsresultaterne.

9. Konklusion

Konklusionen må være, at den nye faktorblok står færdig og klar til brug.

Litteraturliste.

Høegh, Grane (2006), ”*Inflationsforventninger, usercost og prisstigninger*”, GRH31806

Høegh, Grane (2008a), ”*Vækstmodelegenskaber*”, GRH01908

Høegh, Grane (2008b), ”*Ny ligning for usercost*”, GRH08O08

Høegh, Grane (2009), ”*Vækstkorektion i fejlkorrektionsligninger*”, GRH09909

Kristensen, Tony M. (2009), ”*Trendkorrektion i fejlkorrektionsrelationer*”, TMK22O09

Thomsen, Thomas (2007), ”*Bias-corrected Törnqvist indicies*”, TTH15107

Bilag A: Effektivitetsudvidet CES-nyttefunktion

Udvides CES-nyttefunktionen med et effektivtetsindeks får den formen:

$$Y(x_1,x_2)=A\left(\theta^{1/\sigma}\left(e_1x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+\left(1-\theta\right)^{1/\sigma}\left(e_2x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)} \qquad (10.1)$$

hvor y er output, x_1 og x_2 er input-goder til produktionen, θ og σ er parametre, mens e_1 og e_2 er effektivitetsindekset.

For en given produktion $Y=\overline{Y}$ ønskes det at minimere udgiften til vare 1 og 2. Optimeringsproblemet er givet ved:

$$\begin{aligned}&\min_{x_1,x_2} c\left(p_1,p_2,\overline{Y}\right)=p_1x_1+p_2x_2\\&s.t.\\&A\left(\theta^{1/\sigma}\left(e_1x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+\left(1-\theta\right)^{1/\sigma}\left(e_2x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}=\overline{Y}\end{aligned} \qquad (10.2)$$

På baggrund af dette kan følgende Lagrangefunktion opskrives:

$$\begin{aligned}L=&\ p_1x_1+p_2x_2\\&-\lambda\left(A\left(\theta^{1/\sigma}\left(e_1x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+\left(1-\theta\right)^{1/\sigma}\left(e_2x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}-\overline{Y}\right)\end{aligned} \qquad (10.3)$$

Første-ordensbetingelserne til Lagrangefunktionen er givet ved:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=p_1-\lambda\overline{Y}^{1/\sigma}A^{-(\sigma-1)/\sigma}\theta^{1/\sigma}e_1^{(\sigma-1)/\sigma}x_1^{-1/\sigma}=0 \qquad (10.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=p_2-\lambda\overline{Y}^{1/\sigma}A^{-(\sigma-1)/\sigma}\left(1-\theta\right)^{1/\sigma}e_2^{(\sigma-1)/\sigma}x_2^{-1/\sigma}=0 \qquad (10.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\overline{Y}-A\left(\theta^{1/\sigma}\left(e_1x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+\left(1-\theta\right)^{1/\sigma}\left(e_2x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}=0 \qquad (10.6)$$

Ligning (10.4) og (10.5) giver det relative forhold mellem de to varer:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma}\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^{\sigma-1} \qquad (10.7)$$

Isoleres vare 1 i ligning (10.7), indsættes i ligning (10.6) og isoleres vare 2 fås:

$$x_2=\left(\theta\left(\frac{p_1}{e_1}\right)^{-(\sigma-1)}+\left(1-\theta\right)\left(\frac{p_2}{e_2}\right)^{-(\sigma-1)}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(1-\theta\right)p_2^{-\sigma}e_2^{\sigma-1}\frac{\overline{Y}}{A} \qquad (10.8)$$

og indsættes (10.8) i (10.6) og isoleres vare 1 fås:

$$x_1=\left(\theta\left(\frac{p_1}{e_1}\right)^{-(\sigma-1)}+\left(1-\theta\right)\left(\frac{p_2}{e_2}\right)^{-(\sigma-1)}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}\theta p_1^{-\sigma}e_1^{\sigma-1}\frac{\overline{Y}}{A} \qquad (10.9)$$

Indsættes (10.8) og (10.9) i omkostningsfunktionen i (10.2) fås den optimale omkostningsfunktion:

$$C\left(p_1, p_2, \overline{Y}\right) = \left(\theta\left(\frac{p_1}{e_1}\right)^{-(\sigma-1)} + (1-\theta)\left(\frac{p_2}{e_2}\right)^{-(\sigma-1)}\right)^{-\frac{1}{\sigma-1}} \frac{\overline{Y}}{A} \tag{10.10}$$

For en given udgift $\overline{C}$ giver dette den implicitte produktion som:

$$Y\left(p_1, p_2, \overline{C}\right) = A\left(\theta\left(\frac{p_1}{e_1}\right)^{-(\sigma-1)} + (1-\theta)\left(\frac{p_2}{e_2}\right)^{-(\sigma-1)}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \overline{C} \tag{10.11}$$

Prisen på en et stk. ouput er givet ved CES-prisindekset med effektivitetskorrigerede priser:

$$p_{12} \equiv \frac{C}{Y} = A^{-1}\left(\theta\left(\frac{p_1}{e_1}\right)^{-(\sigma-1)} + (1-\theta)\left(\frac{p_2}{e_2}\right)^{-(\sigma-1)}\right)^{-\frac{1}{\sigma-1}} \tag{10.12}$$

På baggrund af ligning (10.11) kan ligning (10.9) og (10.8) omskrives til:

$$\log x_1 = \log\theta - \sigma\log\frac{p_1}{p_{12}} - (1-\sigma)\log\left(Ae_1\right) + \log\frac{\overline{C}}{p_{12}} \tag{10.13}$$

$$\log x_2 = \log(1-\theta) - \sigma\log\frac{p_2}{p_{12}} - (1-\sigma)\log\left(Ae_2\right) + \log\frac{\overline{C}}{p_{12}} \tag{10.14}$$

Det bør lige nævnes, at funktionen er under-identificeret – dvs. der skal påføres parameterrestriktioner.

Bilag B: Opskrivning af produktionsfunktionen

Trenderne i de overordnede nests fanges af de nedre trender, således kan man undlade trender for aggregater uden tab af generalitet – jf. Thomas Thomsen. Hermed er den samlede produktionsfunktion givet ved:

$$fX = A \cdot fKLEBM \tag{10.15}$$

$$fKLEBM(fVm, fKLEB) = \begin{pmatrix} \theta_M^{1/\sigma_M} \left(e_M fVm\right)^{(\sigma_M - 1)/\sigma_M} \\ +\left(1-\theta_M\right)^{1/\sigma_M} \; fKLEB^{(\sigma_M - 1)/\sigma_M} \end{pmatrix}^{\sigma_M /(\sigma_M - 1)} \tag{10.16}$$

$$fKLEB(fKnb, fKLE) = \begin{pmatrix} \theta_B^{1/\sigma_B} \left(e_B \left[uib_{2000} fKnb\right]\right)^{(\sigma_B - 1)/\sigma_B} \\ +\left(1-\theta_B\right)^{1/\sigma_B} \; fKLE^{(\sigma_B - 1)/\sigma_B} \end{pmatrix}^{\sigma_B /(\sigma_B - 1)} \tag{10.17}$$

$$fKLE(fVe, fKL) = \begin{pmatrix} \theta_E^{1/\sigma_E} \left(e_E fVe\right)^{(\sigma_E - 1)/\sigma_E} \\ +\left(1-\theta_E\right)^{1/\sigma_E} \; fKL^{(\sigma_E - 1)/\sigma_E} \end{pmatrix}^{\sigma_E /(\sigma_E - 1)} \tag{10.18}$$

$$fKL(fKnm, Hq) = \begin{pmatrix} \theta_K^{1/\sigma_K} \left(e_K \left[uim_{2000} fKnm\right]\right)^{(\sigma_K - 1)/\sigma_K} \\ +\left(1-\theta_K\right)^{1/\sigma_K} \left(e_L \left[l_{2000} Hq\right]\right)^{(\sigma_K - 1)/\sigma_K} \end{pmatrix}^{\sigma_K /(\sigma_K - 1)} \tag{10.19}$$

hvor fX er produktionen, fVm er materialeinput, $fKnb$ er bygningskapital, fVe er energiforbrug, Hq er arbejdskraft og $fKnm$ er maskinkapital, mens A, θ_i, σ_i er parametre, og e_i er effektivitetsindeks, som er sat til 1 i år 2000.

Der findes direkte data for fX, fVm, $fKnb$, fVe, $fKnm$ og Hq, mens agregaterne $fKLEBM$, $fKLEB$, $fKLE$ og fKL er uobserverbare syntetiske størrelser.

De samlede omkostninger er givet ved:

$$Yc = pvm \cdot fVm + uib \cdot fKnb + pve \cdot fVe + uim \cdot fKnm + l \cdot Hq \tag{10.20}$$

hvor pvm er prisen på materialer, uib er usercost for bygninger, pve er prisen på energi, l er timelønnen og uim er usercost for maskiner. Underomkostningerne er givet ved:

$$Yckl = uim \cdot fKnm + l \cdot Hq \tag{10.21}$$

$$Yckle = pve \cdot fVe + uim \cdot fKnm + l \cdot Hq \tag{10.22}$$

$$Yckleb = uib \cdot fKnb + pve \cdot fVe + uim \cdot fKnm + l \cdot Hq \tag{10.23}$$

For en given produktion er de omkostningsminimerende forbrug jf. bilag A givet ved:

$$\begin{aligned} \log fVm = \log \theta_M - \sigma_M \log \frac{pvm}{pklebm} \\ -\left(1-\sigma_M\right) \log e_M + \left(\log A + \log fX\right) \end{aligned} \tag{10.24}$$

$$\log fKLEB = \log\left(1-\theta_M\right) - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} + \left(\log A + \log fX\right) \tag{10.25}$$

$$\log\left[uib_{2000} fKnb\right] = \log\theta_B - \sigma_B \log\frac{uib/uib_{2000}}{pkleb} - \left(1-\sigma_B\right)\log e_B + \log fKLEB \tag{10.26}$$

$$\log fKLE = \log\left(1-\theta_B\right) - \sigma_B \log\frac{pkle}{pkleb} + \log fKLEB \tag{10.27}$$

$$\log fVe = \log\theta_E - \sigma_E \log\frac{pve}{pkle} - \left(1-\sigma_E\right)\log e_E + \log fKLE \tag{10.28}$$

$$\log fKL = \log\left(1-\theta_E\right) - \sigma_E \log\frac{pkl}{pkle} + \log fKLE \tag{10.29}$$

$$\log\left[uim_{2000} fKnm\right] = \log\theta_K - \sigma_K \log\frac{uim/uim_{2000}}{pkl} - \left(1-\sigma_K\right)\log e_K + \log fKL \tag{10.30}$$

$$\log\left[l_{2000} Hq\right] = \log\left(1-\theta_K\right) - \sigma_K \log\frac{l/l_{2000}}{pkl} - \left(1-\sigma_K\right)\log e_L + \log fKL \tag{10.31}$$

hvor priserne for aggregaterne er givet ved CES-prisindeks:

$$pklebm \equiv \left(\theta_M \left(\frac{pvm}{e_M}\right)^{1-\sigma_M} + \left(1-\theta_M\right) pkleb^{1-\sigma_M}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_M}} \tag{10.32}$$

$$pkleb \equiv \left(\theta_B \left(\frac{uib/uib_{2000}}{e_B}\right)^{1-\sigma_B} + \left(1-\theta_B\right) pkle^{1-\sigma_B}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_B}} \tag{10.33}$$

$$pkle \equiv \left(\theta_E \left(\frac{pve}{e_E}\right)^{1-\sigma_E} + \left(1-\theta_E\right) pkl^{1-\sigma_E}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_E}} \tag{10.34}$$

$$pkl \equiv \left(\theta_K \left(\frac{uim/uim_{2000}}{e_K}\right)^{1-\sigma_K} + \left(1-\theta_K\right)\left(\frac{l/l_{2000}}{e_L}\right)^{1-\sigma_K}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_K}} \tag{10.35}$$

Ovenstående er prisindeks lig 1 i 2000.

Bilag C. Faktorinput på baggrund af samlet produktion

Faktorinputene givet i bilag B kan opskrives som funktion af samlet produktion ved simpelt at insubstituere formlerne for produktionsaggregaterne i formlerne for faktorinputs. Hermed fås:

$$\log fVm = \alpha_M - \sigma_M \log \frac{pvm}{pklebm} + \log fX - (1-\sigma_M)\log e_M \tag{10.36}$$

$$\begin{aligned} \log fKnb = {} & \alpha_B - \sigma_B \log \frac{uib}{pkleb} - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} \\ & + \log fX - (1-\sigma_B)\log e_B \end{aligned} \tag{10.37}$$

$$\begin{aligned} \log fVe = {} & \alpha_E - \sigma_E \log \frac{pve}{pkle} - \sigma_B \log \frac{pkle}{pkleb} \\ & -\sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} + \log fX - (1-\sigma_E)\log e_E \end{aligned} \tag{10.38}$$

$$\begin{aligned} \log fKnm = {} & \alpha_K - \sigma_K \log \frac{uim}{pkl} - \sigma_E \log \frac{pkl}{pkle} \\ & -\sigma_B \log \frac{pkle}{pkleb} - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} \\ & + \log fX - (1-\sigma_K)\log e_K \end{aligned} \tag{10.39}$$

$$\begin{aligned} \log Hq = {} & \alpha_L - \sigma_K \log \frac{l}{pkl} - \sigma_E \log \frac{pkl}{pkle} \\ & -\sigma_B \log \frac{pkle}{pkleb} - \sigma_M \log \frac{pkleb}{pklebm} \\ & + \log fX - (1-\sigma_K)\log e_L \end{aligned} \tag{10.40}$$

hvor

$$\alpha_M = \log\theta_M + \log A \tag{10.41}$$

$$\alpha_B = -(1-\sigma_B)\log uib_{2000} + \log\theta_B + \log(1-\theta_M) + \log A \tag{10.42}$$

$$\alpha_E = \log\theta_E + \log(1-\theta_B) + \log(1-\theta_M) + \log A \tag{10.43}$$

$$\alpha_K = \begin{pmatrix} \log\theta_K - (1-\sigma_K)\log uim_{2000} + \log(1-\theta_E) \\ + \log(1-\theta_B) + \log(1-\theta_M) + \log A \end{pmatrix} \tag{10.44}$$

$$\alpha_L = \begin{pmatrix} \log(1-\theta_K) - (1-\sigma_K)\log l_{2000} + \log(1-\theta_E) \\ + \log(1-\theta_B) + \log(1-\theta_M) + \log A \end{pmatrix} \tag{10.45}$$

Bilag D. Effektivitetsjusterede prisindeks

Det effektivitetsjusterede prisindeks for kapital og arbejdskraft, pkl, approksimeres med et Törnqvistprisindeks:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pkl\right) \approx & \left(\frac{1}{2}\frac{Ycl}{Yckl}+\frac{1}{2}\frac{Ycl_{-1}}{Yckl_{-1}}\right)D\log\frac{l}{e_L} \\
& +\left(\frac{1}{2}\frac{Yck}{Yckl}+\frac{1}{2}\frac{Yck_{-1}}{Yckl_{-1}}\right)D\log\frac{uim}{e_K}
\end{aligned}
\qquad (10.46)
$$

hvor $Ycl \equiv l \cdot Hq$ og $Yck \equiv uim \cdot fKnm$. Ovenstående ligning kan omskrives til:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pkl\right) \approx D\log\left(pyckl\right) & -\left(\frac{1}{2}\frac{Ycl}{Yckl}+\frac{1}{2}\frac{Ycl_{-1}}{Yckl_{-1}}\right)D\log e_L \\
& -\left(\frac{1}{2}\frac{Yck}{Yckl}+\frac{1}{2}\frac{Yck_{-1}}{Yckl_{-1}}\right)D\log e_K
\end{aligned}
\qquad (10.47)
$$

hvor $pyckl$ er det ikke effektivitetskorrigerede Törnqvistprisindeks. Altså giver ovenstående ligning en approksimativ sammenhæng mellem effektivitets og ikke effektivitetsjusterede prisindeks.

Da omkostningsandelene ikke ændrer sig voldsomt fra periode til periode kan denne sammenhæng igen approksimeres ved:

$$
D\log\left(pkl\right) \approx D\log\left(pyckl\right) - \frac{Ycl_{-1}}{Yckl_{-1}}D\log e_L - \frac{Yck_{-1}}{Yckl_{-1}}D\log e_K \qquad (10.48)
$$

Tilsvarende kan prisen på *fKLE*-aggregatet, $pkle$, approksimeres med et Törnqvistprisindeks:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pkle\right) \approx & \left(\frac{1}{2}\frac{Ve_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Ve}{Yckle}\right)D\log\frac{pve}{e_E} \\
& +\left(\frac{1}{2}\frac{Yckl_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Yckl}{Yckle}\right)D\log pkl
\end{aligned}
\qquad (10.49)
$$

hvor $Ve = pve \cdot fVe$. Indsættes udtrykket for pkl fra (10.47) fås:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pkle\right) \approx & \left(\frac{1}{2}\frac{Ve_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Ve}{Yckle}\right)D\log\frac{pve}{e_E} \\
& -\left(\frac{1}{2}\frac{Yckl_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Yckl}{Yckle}\right)D\log\left(pyckl\right) \\
& -\left(\frac{1}{2}\frac{Ycl_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Ycl}{Yckle}\right)D\log e_L \\
& -\left(\frac{1}{2}\frac{Ycm_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Ycm}{Yckle}\right)D\log e_K
\end{aligned}
\qquad (10.50)
$$

hvilket kan omskrives til:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pkle\right) \approx D\log\left(pyckle\right) & \\
& -\left(\frac{1}{2}\frac{Ve_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Ve}{Yckle}\right)D\log e_E \\
& -\left(\frac{1}{2}\frac{Ycl_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Ycl}{Yckle}\right)D\log e_L \\
& -\left(\frac{1}{2}\frac{Ycm_{-1}}{Yckle_{-1}}+\frac{1}{2}\frac{Ycm}{Yckle}\right)D\log e_K
\end{aligned}
\tag{10.51}
$$

hvor $pyckle$ er det ikke effektivitetskorrigerede prisindeks. Igen vælges den simplere approksimation:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pkle\right) \approx D\log\left(pyckle\right) - \frac{Ve_{-1}}{Yckle_{-1}}D\log e_E & \\
-\frac{Ycl_{-1}}{Yckle_{-1}}D\log e_L - \frac{Ycm_{-1}}{Yckle_{-1}}D\log e_K &
\end{aligned}
\tag{10.52}
$$

På fuldstændig tilsvarende måde kan prisindekset for *fKLEB*-agregatet, *pkleb*, approksimeres ved:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pkleb\right) \approx D\log\left(pyckleb\right) - \frac{Ycb_{-1}}{Yckleb_{-1}}D\log e_B - \frac{Ve_{-1}}{Yckleb_{-1}}D\log e_E & \\
-\frac{Ycl_{-1}}{Yckleb_{-1}}D\log e_L - \frac{Ycm_{-1}}{Yckleb_{-1}}D\log e_K &
\end{aligned}
\tag{10.53}
$$

hvor *pyckleb* er det ikke effektivitetskorrigerede prisindeks for *fKLEB* og $Ycb \equiv uib \cdot fKnb$.

Endelig kan det sidste prisaggregat approksimeres ved:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(pklebm\right) \approx D\log\left(pyc\right) - \frac{Vm_{-1}}{Yc_{-1}}D\log e_M - \frac{Ycb_{-1}}{Yc_{-1}}D\log e_B & \\
-\frac{Ve_{-1}}{Yc_{-1}}D\log e_E - \frac{Ycl_{-1}}{Yc_{-1}}D\log e_L - \frac{Ycm_{-1}}{Yc_{-1}}D\log e_K &
\end{aligned}
\tag{10.54}
$$

hvor *pyc* er det ikke effektivitetskorrigerede prisindeks for *fKLEBM* og $Vm \equiv pvm \cdot fVm$.

Bilag E. Den estimerede models ligevægtsrelationer

Faktorinputene givet i bilag C kan opskrives som en funktion af ikke-effektivitetsjusterede priser:

$$\log fVmw = \alpha_M - \sigma_M \log\frac{pvm}{pyc} + \log fX + \log dtfvm \tag{10.55}$$

$$\begin{aligned}\log fKnbw = {} & \alpha_B - \sigma_B \log\frac{uib}{pyckleb} - \sigma_M \log\frac{pyckleb}{pyc} \\ & + \log fX + \log dtfknb\end{aligned} \tag{10.56}$$

$$\begin{aligned}\log fVew = {} & \alpha_E - \sigma_E \log\frac{pve}{pyckle} - \sigma_B \log\frac{pyckle}{pyckleb} \\ & -\sigma_M \log\frac{pyckleb}{pyc} + \log fX + \log dtfve\end{aligned} \tag{10.57}$$

$$\begin{aligned}\log fKnmw = {} & \alpha_K - \sigma_K \log\frac{uim}{pyckl} - \sigma_E \log\frac{pyckl}{pyckle} \\ & -\sigma_B \log\frac{pyckle}{pyckleb} - \sigma_M \log\frac{pyckleb}{pyc} \\ & + \log fX + \log dtfknm\end{aligned} \tag{10.58}$$

$$\begin{aligned}\log Hqw = {} & \alpha_L - \sigma_K \log\frac{l}{pyckl} - \sigma_E \log\frac{pyckl}{pyckle} \\ & -\sigma_B \log\frac{pyckle}{pyckleb} - \sigma_M \log\frac{pyckleb}{pyc} \\ & + \log fX + \log dthq\end{aligned} \tag{10.59}$$

hvor

$$\log dtfvm \equiv -\log e_M + \sigma_M \log\frac{e_M}{e_{KLEBM}} \tag{10.60}$$

$$\log dtfknb \equiv -\log e_B + \sigma_B \log\frac{e_B}{e_{KLEB}} + \sigma_M \log\frac{e_{KLEB}}{e_{KLEBM}} \tag{10.61}$$

$$\begin{aligned}\log dtfve \equiv {} & -\log e_E + \sigma_E \log\frac{e_E}{e_{KLE}} \\ & +\sigma_B \log\frac{e_{KLE}}{e_{KLEB}} + \sigma_M \log\frac{e_{KLEB}}{e_{KLEBM}}\end{aligned} \tag{10.62}$$

$$\begin{aligned}\log dtfknm \equiv {} & -\log e_K + \sigma_K \log\frac{e_K}{e_{KL}} + \sigma_E \log\frac{e_{KL}}{e_{KLE}} \\ & +\sigma_B \log\frac{e_{KLE}}{e_{KLEB}} + \sigma_M \log\frac{e_{KLEB}}{e_{KLEBM}}\end{aligned} \tag{10.63}$$

$$\begin{aligned}\log dthq \equiv {} & -\log e_L + \sigma_K \log\frac{e_L}{e_{KL}} + \sigma_E \log\frac{e_{KL}}{e_{KLE}} \\ & +\sigma_B \log\frac{e_{KLE}}{e_{KLEB}} + \sigma_M \log\frac{e_{KLEB}}{e_{KLEBM}}\end{aligned} \tag{10.64}$$

og

$$\log e_{KLEBM} = \log \frac{pyc}{pklebm} \tag{10.65}$$

$$\log e_{KLEB} = \log \frac{pyckleb}{pkleb} \tag{10.66}$$

$$\log e_{KLE} = \log \frac{pyckle}{pkle} \tag{10.67}$$

$$\log e_{KL} = \log \frac{pyckl}{pkl} \tag{10.68}$$

På baggrund af bilag D fås, at forholdet mellem effektivitets og ikke-effektivitetsjusterede priser er givet ved:

$$D\log \frac{pyckl}{pkl} \approx \frac{Yck_{-1}}{Yckl_{-1}} D\log e_K + \frac{Ycl_{-1}}{Yckl_{-1}} D\log e_L \tag{10.69}$$

$$D\log \frac{pyckle}{pkle} \approx \frac{Ve_{-1}}{Yckle_{-1}} D\log e_E + \frac{Yckl_{-1}}{Yckle_{-1}} D\log e_{KL} \tag{10.70}$$

$$D\log \frac{pyckleb}{pkleb} \approx \frac{Ycb_{-1}}{Yckleb_{-1}} D\log e_B + \frac{Yckle_{-1}}{Yckleb_{-1}} D\log e_{KLE} \tag{10.71}$$

$$D\log \frac{pyc}{pklebm} \approx \frac{Vm_{-1}}{Yc_{-1}} D\log e_M + \frac{Yckleb_{-1}}{Yc_{-1}} D\log e_{KLEB} \tag{10.72}$$

hvor $ycl = l \cdot Hq$, $yckl = ycl + uim \cdot fKnm$, $yckle = yckl + Ve$, $yckleb = yckle + uib \cdot fKnb$ og $yc = yckleb + Vm$.

Disse udtryk indsættes:

$$\log e_{KL} \approx \log e_{KL,-1} + \frac{Yck_{-1}}{Yckl_{-1}} D\log e_K + \frac{Ycl_{-1}}{Yckl_{-1}} D\log e_L \tag{10.73}$$

$$\log e_{KLE} \approx \log e_{KLE,-1} + \frac{Ve_{-1}}{Yckle_{-1}} D\log e_E + \frac{Yckl_{-1}}{Yckle_{-1}} D\log e_{KL} \tag{10.74}$$

$$\log e_{KLEB} \approx \log e_{KLEB,-1} + \frac{Ycb_{-1}}{Yckleb_{-1}} D\log e_B + \frac{Yckle_{-1}}{Yckleb_{-1}} D\log e_{KLE} \tag{10.75}$$

$$\log e_{KLEBM} \approx \log e_{KLEBM,-1} + \frac{Vm_{-1}}{Yc_{-1}} D\log e_M + \frac{Yckleb_{-1}}{Yc_{-1}} D\log e_{KLEB} \tag{10.76}$$

Niveauerne findes ved, at alle effektivitetsindeks er lig 1 i sidste endelige år.

Bilag F: Effektivitetsudvidet Leontief-nyttefunktion

En CES-funktion med en substitutionselasticitet er en Leontiefnyttefunktion. Udvides Leontief-nyttefunktionen med et effektivtetsindeks får den formen:

$$Y(x_1, x_2) = A \cdot MIN\left(\theta^{-1} e_1 x_1; (1-\theta)^{-1} e_2 x_2\right) \tag{10.1}$$

hvor y er output, x_1 og x_2 er input-goder til produktionen, θ og A er parametre, mens e_1 og e_2 er effektivitetsindekset.

For en given produktion $Y = \overline{Y}$ ønskes det at minimere udgiften til vare 1 og 2. Optimeringsproblemet er givet ved:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1, x_2} c\left(p_1, p_2, \overline{Y}\right) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ &s.t. \\ &A \cdot MIN\left(\theta^{-1} e_1 x_1; (1-\theta)^{-1} e_2 x_2\right) = \overline{Y} \end{aligned} \tag{10.2}$$

På baggrund af dette kan følgende Lagrangefunktion opskrives:

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda\left(A \cdot MIN\left(\theta^{-1} e_1 x_1; (1-\theta)^{-1} e_2 x_2\right) - \overline{Y}\right) \tag{10.3}$$

Begge første-ordensbetingelserne kan kun være opfykldt for $\theta_1 e_1 x_1 = \theta_2 e_2 x_2$ og er givet ved:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \cdot A / \theta e_1 = 0 \tag{10.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \cdot A / (1-\theta) e_2 = 0 \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = A / \theta e_1 x_1 - \overline{Y} = A / (1-\theta) e_2 x_2 - \overline{Y} = 0 \tag{10.6}$$

Det relative forhold mellem de to varer er:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\theta_2 e_2}{\theta_1 e_1} \tag{10.7}$$

Budgetbetingelsen giver:

$$x_1 = \theta \frac{\overline{Y}}{A e_1} \tag{10.8}$$

$$x_2 = (1-\theta) \frac{\overline{Y}}{A e_2} \tag{10.9}$$

Indsættes i omkostningsfunktionen fås den optimale omkostningsfunktion:

$$C\left(p_1, p_2, \overline{Y}\right) = \left(\theta \frac{p_1}{A e_1} + (1-\theta) \frac{p_2}{A e_2}\right) \overline{Y} \tag{10.10}$$

For en given udgift $\overline{C}$ giver dette den implicitte produktion som:

$$Y\left(p_1, p_2, \overline{C}\right) = \left(\theta \frac{p_1}{A e_1} + (1-\theta) \frac{p_2}{A e_2}\right)^{-1} \overline{C} \tag{10.11}$$

På baggrund af ligning (10.11) kan ligning (10.8) og (10.9) omskrives til:

$$x_1 = \theta \frac{\bar{C}}{Ae_1 p_{12}} \tag{10.12}$$

$$x_2 = (1-\theta) \frac{\bar{C}}{Ae_2 p_{12}} \tag{10.13}$$

hvor $p_{12} \equiv \theta \frac{p_1}{Ae_1} + (1-\theta) \frac{p_2}{Ae_2}$ er CES-prisindekset med effektivitetskorrigerede priser.

Bilag G: Opskrivning af produktionsfunktionen

Udbyttes at materialer og energi er Leontief-nyttefunktioner fås:

$$fX = A \cdot fKLEBM \tag{10.14}$$

$$fKLEBM\,(fVm, fKLEB) = MIN\left(\theta_M^{-1} e_M\, fVm; (1-\theta_M)^{-1}\; fKLEB\right) \tag{10.15}$$

$$fKLEB(fKnb, fKLE) = MIN\begin{pmatrix} \theta_B^{-1} e_B \left[uib_{2000} fKnb\right] \\ +(1-\theta_B)^{-1}\; fKLE \end{pmatrix} \tag{10.16}$$

$$fKLE(fVe, fKL) = \begin{pmatrix} \theta_E \left(e_E fVe\right)^{(\sigma_E-1)/\sigma_E} \\ +(1-\theta_E)\, fKL^{(\sigma_E-1)/\sigma_E} \end{pmatrix}^{\sigma_E/(\sigma_E-1)} \tag{10.17}$$

$$fKL(fKnm, Hq) = \begin{pmatrix} \theta_K \left(e_K \left[uim_{2000} fKnm\right]\right)^{(\sigma_K-1)/\sigma_K} \\ +(1-\theta_K)\left(e_L \left[l_{2000} Hq\right]\right)^{(\sigma_K-1)/\sigma_K} \end{pmatrix}^{\sigma_K/(\sigma_K-1)} \tag{10.18}$$

For en given produktion er de omkostningsminimerende forbrug givet ved:

$$\log fVm = \log\theta_M - \log e_M + \left(\log fX - \log A\right) \tag{10.19}$$

$$\log fKLEB = \log(1-\theta_M) + \left(\log fX - \log A\right) \tag{10.20}$$

$$\log\left[uib_{2000} fKnb\right] = \log\theta_B - \log e_B + \log fKLEB \tag{10.21}$$

$$\log fKLE = \log(1-\theta_B) + \log fKLEB \tag{10.22}$$

$$\log fVe = \sigma_E \log\theta_E - \sigma_E \log\frac{pve}{pkle} - (1-\sigma_E)\log e_E + \log fKLE \tag{10.23}$$

$$\log fKL = \sigma_E \log(1-\theta_E) - \sigma_E \log\frac{pkl}{pkle} + \log fKLE \tag{10.24}$$

$$\begin{aligned} \log\left[uim_{2000} fKnm\right] = \sigma_K \log\theta_K - \sigma_K \log\frac{uim/uim_{2000}}{pkl} \\ -(1-\sigma_K)\log e_K + \log fKL \end{aligned} \tag{10.25}$$

$$\begin{aligned} \log\left[l_{2000} Hq\right] = \sigma_K \log(1-\theta_K) - \sigma_K \log\frac{l/l_{2000}}{pkl} \\ -(1-\sigma_K)\log e_L + \log fKL \end{aligned} \tag{10.26}$$

hvor priserne for aggregaterne er givet ved henholdsvis Leontief- og CES-prisindeks:

$$pklebm \equiv \left(\theta_M \frac{pvm}{e_M} + (1-\theta_M)\, pkleb\right) \tag{10.27}$$

$$pkleb \equiv \left(\theta_B \left(\frac{uib/uib_{2000}}{e_B}\right) + (1-\theta_B)\, pkle\right) \tag{10.28}$$

$$pkle \equiv \left(\theta_E \left(\frac{pve}{e_E} \right)^{1-\sigma_E} + (1-\theta_E)\, pkl^{1-\sigma_E} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_E}} \tag{10.29}$$

$$pkl \equiv \left(\theta_K \left(\frac{uim / uim_{2000}}{e_K} \right)^{1-\sigma_K} + (1-\theta_K) \left(\frac{l / l_{2000}}{e_L} \right)^{1-\sigma_K} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_K}} \tag{10.30}$$

Produktionsfunktionerne kan omskrives til:

$$\log fVm = \alpha_M + \log fX - \log e_M \tag{10.31}$$

$$\log fKnb = \alpha_B + \log fX - \log e_B \tag{10.32}$$

$$\log fVe = \alpha_E - \sigma_E \log \frac{pve}{pkle} + \log fX - (1-\sigma_E) \log e_E \tag{10.33}$$

$$\begin{aligned} \log fKnm = {} & \alpha_K - \sigma_K \log \frac{uim}{pkl} - \sigma_E \log \frac{pkl}{pkle} \\ & + \log fX - (1-\sigma_K) \log e_K \end{aligned} \tag{10.34}$$

$$\begin{aligned} \log Hq = {} & \alpha_L - \sigma_K \log \frac{l}{pkl} - \sigma_E \log \frac{pkl}{pkle} \\ & + \log fX - (1-\sigma_L) \log e_L \end{aligned} \tag{10.35}$$

hvor

$$\alpha_M = \log \theta_M - \log A \tag{10.36}$$

$$\alpha_B = -\log uib_{2000} + \log \theta_B + \log(1-\theta_M) - \log A \tag{10.37}$$

$$\alpha_E = \log \theta_E + \log(1-\theta_B) + \log(1-\theta_M) - \log A \tag{10.38}$$

$$\alpha_K = \begin{pmatrix} \log \theta_K - (1-\sigma_K) \log uim_{2000} + \log(1-\theta_E) \\ + \log(1-\theta_B) + \log(1-\theta_M) - \log A \end{pmatrix} \tag{10.39}$$

$$\alpha_L = \begin{pmatrix} \log(1-\theta_K) - (1-\sigma_K) \log l_{2000} + \log(1-\theta_E) \\ + \log(1-\theta_B) + \log(1-\theta_M) - \log A \end{pmatrix} \tag{10.40}$$

Disse relationer kan vendes om, så man kan finde de mere grundlæggende parametre:

$$\theta_K = \frac{\exp(\alpha_L - \alpha_K)(l_{2000} / uim_{2000})^{-(1-\sigma_K)}}{1 + \exp(\alpha_L - \alpha_K)(l_{2000} / uim_{2000})^{-(1-\sigma_K)}} \tag{10.41}$$

$$\theta_E = \frac{\exp(\alpha_K - \alpha_E)\theta_K uim_{2000}^{-(1-\sigma_K)}}{1 + \exp(\alpha_K - \alpha_E)\theta_K uim_{2000}^{-(1-\sigma_K)}} \tag{10.42}$$

$$\theta_B = \frac{\exp(\alpha_E - \alpha_B)\theta_E uib_{2000}}{1 + \exp(\alpha_E - \alpha_B)\theta_E uib_{2000}} \tag{10.43}$$

$$\theta_M = \frac{\exp(\alpha_B - \alpha_M) uib_{2000}^{-1} \theta_B}{1 + \exp(\alpha_B - \alpha_M) uib_{2000}^{-1} \theta_B} \tag{10.44}$$

$$A = \frac{\theta_M}{\exp(\alpha_M)} \tag{10.45}$$